

שבוע 1: מבוא למד"ר, מד"ר לינארית מסדר 1

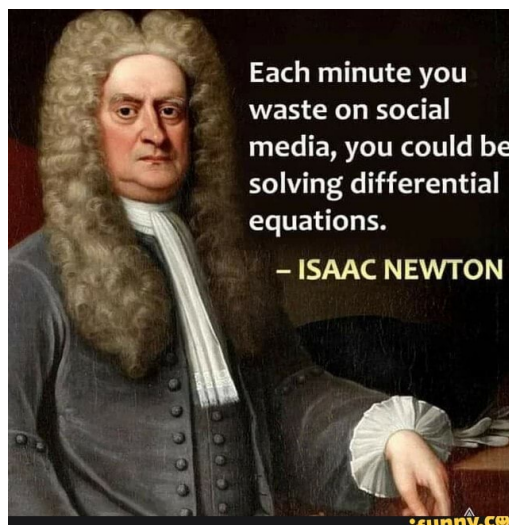
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1	משוואות דיפרנציאליות רגילות לינאריות מסדר ראשון
2	1.1	מהי משוואה דיפרנציאלית רגילה, מדוע זה מעניין, ודוגמאות
4	1.2	מד"ר לינארית מסדר ראשון: הגדרות ופתרון בעזרת גורם אינטגרציה
	1.3	מד"ר לינארית מסדר ראשון: בעיית התחלה, פתרון כללי ופרטי, ופתרון באמצעות הפרדת משתנים
8		



1 | משוואות דיפרנציאליות רגילות לינאריות מסדר ראשון

1.1 מהי משוואה דיפרנציאלית רגילה, מדוע זה מעניין, ודוגמאות

מהי משוואה דיפרנציאלית רגילה?

משוואה דיפרנציאלית רגילה (בקיצור: מד"ר) היא משוואה שהנעלם בה הוא פונקציה $y(x)$, כאשר במשוואה יכולים להופיע המשתנה, הפונקציה, ונגזרותיה: $x, y, y', y'', \dots$.

דוגמאות:

1. המד"ר הפשוטה ביותר היא אינטגרל לא מסוים שראיתם בחדו"א. למשל, $y' = x$. הפתרון כפי שראיתם הוא $y = \frac{x^2}{2} + C$.

2. מד"ר נוספת: $y' + y = x$. בניגוד לקודמת, אין לנו מושג איך לפתור אותה ואיזו y מקיימת אותה.

3. המד"ר $(y')^2 + \sin y = 3$ היא מד"ר **מסדר ראשון** כמו שתי הקודמות אבל היא אינה **לינארית** בניגוד לשתי הקודמות. בהמשך נכתוב הגדרות אלה במדויק.

נעיר כי בניגוד לקודמות, היא מד"ר **אוטונומית**: המשתנה x אינו מופיע בה במפורש.

4. המד"ר $(y'')^3 + e^{y'} = 2y' - y$ היא מד"ר לא לינארית מסדר שני.

גם היא, כמו הקודמת, מד"ר אוטונומית.

הנה רשימה חלקית של מושגים שנגדיר במדויק בהמשך:

- **הסדר** של המד"ר הוא סדר הנגזרת הגבוהה ביותר שמופיעה במד"ר.
 - מד"ר מכונה **לינארית** אם y ונגזרותיה מופיעות באופן לינארי. אין כל דרישה שהמשתנה יופיע בצורה לינארית. למשל, $y' + x^3 y = \sin x$ היא מד"ר לינארית מסדר 1, אבל $yy' = x$ היא מד"ר לא לינארית מסדר 1.
 - לבסוף, **פתרון** של מד"ר הוא פונקציה גזירה מסדר המד"ר אשר מקיימת אותה.
- אנחנו נגדיר את המושגים השונים במדויק בקרוב עבור מד"ר מסדר 1, ובהמשך עבור מד"ר מסדר גבוה יותר. התיאור הנ"ל משמש כמבוא בלבד.

דוגמאות של מד"ר חשובות

משוואות דיפרנציאליות (רגילות וחלקיות) מתארות את חוקי הטבע ועוד דברים רבים.

דוגמאות:

1. גידול אוכלוסייה: אם $N(t)$ הוא גודל האוכלוסייה בזמן t אז

$$N'(t) = kN(t)$$

כאשר $k > 0$ קבוע.

זה מבטא כי קצב הילודה פרופורציונאלי לגודל האוכלוסייה.

מבחינה אינטואיטיבית, צריך לדעת את גודל האוכלוסייה בזמן $t = 0$ (למשל) כדי לקבוע חד משמעית את $N(t)$ לכל $t > 0$. כלומר, יש דרגת חופש אחת $N(0)$ (או $N(t_0)$ עבור איזשהו t_0).

2. התפרקות רדיואקטיבית:

$$y' = -\alpha y$$

כאשר $\alpha > 0$. זה מבטא כי אחוז קבוע ממספר החלקיקים הקיימים דועכים לחלקיקים אחרים.

מבחינה אינטואיטיבית, צריך לדעת את מספר החלקיקים בזמן מסוים כדי לקבוע חד משמעית את $y(t)$ לכל t . כלומר, שוב יש דרגת חופש אחת $y(t_0)$.

3. תנועת גוף המחובר לקפיץ נקבעת לפי החוק השני של ניוטון $F = ma = my''$, כאשר ידוע כי $F = -ky$. הפונקציה $y(t)$ מבטאת את המיקום של הגוף ביחס לנקודת שיווי המשקל של הקפיץ.

לכן מתקבלת המד"ר

$$my'' = -ky$$

שהיא מד"ר לינארית מסדר 2. נראה בעתיד מה הפתרונות שלה.

מבחינה אינטואיטיבית, לא מספיק לדעת את המיקום של הגוף $y(t_0)$ אלא יש לדעת גם מהי מהירותו הרגעית $y'(t_0)$ באיזשהו זמן $t = t_0$ כדי לקבוע חד משמעית את $y(t)$ לכל $t > t_0$. כלומר, בדוגמה זו יש שתי דרגות חופש.

למה כדאי לצפות בהתמודדות עם מד"ר

בהינתן מד"ר, הציפייה הראשית היא לפתור אותה. זה אומר למצוא את כל הפונקציות שמקיימות אותה, או לפחות חלק.

כלל האצבע הוא שלמד"ר מסדר n יש פתרון כללי עם n דרגות חופש. אנחנו נדייק את זה בעתיד, וזה שימושי כאשר יש לנו פחות אינטואיציה מאשר בדוגמאות החשובות הנ"ל.

אבל, מתברר שלעיתים קרובות לא ניתן לפתור את המד"ר כי זה קשה מדי מבחינה טכנית. לעיתים הפתרונות הם פונקציות לא אלמנטריות, מה ששולל סיכוי להגיע לנוסחה משביעת רצון.

במקרים כאלו הפשרה הראשונה שאותה נכיר בקורס היא הבנה של התנהגות כללית של הפתרונות ללא מציאתם במפורש. לצורך הזה חשוב דיוק מתמטי.

הפשרה השניה היא פתרון נומרי, שלא יילמד בקורס.

1.2 מד"ר לינארית מסדר ראשון: הגדרות ופתרון בעזרת גורם אינטגרציה

הגדרה של מד"ר ושל פתרונות

הגדרה 1. מד"ר מסדר ראשון היא משוואה מהצורה $F(x, y, y') = 0$ כאשר $F(x, y, z)$ פונקציה של שלושה משתנים אשר באמת תלויה במשתנה השלישי שלה z .

פתרון של המד"ר בקטע I הוא פונקציה $y(x)$ אשר גזירה בקטע I וכן מקיימת

$$F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0, \forall x \in I$$

בקצוות הקטע, אם יש קצוות, הכוונה היא לגזירות חד צדדית ולנגזרת חד צדדית.

הערות:

- אם ניתן, רצוי לכתוב מד"ר בצורה $y' = f(x, y)$. זה מצריך חילוץ של y' ולעיתים אינו אפשרי.
- אם $y(x)$ פתרון של המד"ר $y' = f(x, y)$ בקטע I וידוע כי $f(x, y)$ פונקציה רציפה בתחום המכיל הגרף של $y(x)$, אז $y'(x) = f(x, y(x))$ רציפה ב- I בתור הרכבה של פונקציות רציפות. כלומר, במקרה כזה פתרונות יהיו לא רק גזירים אלא **גזירים ברציפות**.

הגדרה: יהי $I \subset \mathbb{R}$ קטע. מד"ר לינארית מסדר ראשון היא משוואה מהצורה

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \quad (1)$$

כאשר a, b, c הן פונקציות של משתנה יחיד שמוגדרות בקטע I וכן $a(x)$ אינה זהותית 0 ב- I .

- הפונקציות $a(x), b(x)$ מכונות **מקדמי המד"ר**.
- הפונקציה $c(x)$ מכונה **החלק האי-הומוגני של המד"ר**.
- אם $c(x) \equiv 0$ בקטע I אז נאמר שהמד"ר **הומוגני** ב- I , ואחרת נאמר שהיא **אי הומוגנית** ב- I .
- הביטוי

$$L[y] = ay' + by$$

מכונה **האופרטור הדיפרנציאלי של המד"ר**.

הערות:

- אנחנו נניח באופן כללי שהפונקציות $a(x), b(x), c(x)$ רציפות בקטע I (אלא אם נאמר אחרת).
- האופרטור הדיפרנציאלי $L[y] = ay' + by$ מוגדר לכל פונקציה גזירה $y(x)$, ולא רק לפתרונות של המד"ר. כדאי לחשוב על L בתור טרנספורמציה לינארית ממרחב הפונקציות הגזירות אל מרחב הפונקציות.
- פונקציה גזירה $y(x)$ היא פתרון של המד"ר אם ורק אם $L[y] = c$.
- האופרטור הדיפרנציאלי $L[y]$ מוגדר במקרה של מד"ר לינארית בלבד, ולא למד"ר כללית.

מד"ר מנורמלות ושקולות

דוגמאות:

1. מד"ר לינארית מסדר ראשון הומוגנית: $x^2y' - 2y = 0$.
 2. מד"ר לינארית מסדר ראשון אי הומוגנית: $x^2y' - 2y = \sin x$.
 3. מד"ר לא לינארית מסדר ראשון: $\sin y' - y^2 = 3$.
 4. מד"ר לינארית מסדר שני הומוגנית: $xy'' - e^xy' + 3xy = 0$.
 5. עבור $y' - \cos(x)y = 0$, $y = e^{\sin(x)}$ הוא פתרון אבל $y = e^x$ אינו פתרון.
 6. המד"ר $y' + \frac{y}{x} = 7$ אינה מוגדרת בקטעים שמכילים את $x = 0$ ולכן אין לה פתרונות בקטעים כאלה.
 7. המד"ר $xy' - y = x^2$ אי הומוגנית ואינה מנורמלת.
- הגרסה המנורמלת שלה היא $y' - \frac{y}{x} = x$, אך היא אינה שקולה למד"ר המקורית בקטעים המכילים את הנקודה $x = 0$.
- למשל, $y = x^2$ פותרת את המד"ר המקורית בקטע $(-1, 1)$, אבל המד"ר המנורמלת אינה מוגדרת בכל הקטע $(-1, 1)$ בגלל שאינה מוגדרת בנקודה $x = 0$, כך שאין אפשרות לדבר על פתרונות שלה בקטע זה.
- בכל קטע שאינו מכיל את הנקודה $x = 0$, שתי המד"ר שקולות.

הגדרה:

1. המד"ר הלינארית $ay' + by = c$ נקראת מנורמלת בקטע I אם $a(x) \equiv 1$ ב- I .
 2. שתי מד"ר נקראות שקולות בקטע I אם כל פתרון של אחת ב- I הוא גם פתרון של השנייה ב- I ולהיפך.
- אם $a(x) \neq 0$ (לא מתאפסת בקטע) אז ניתן להביא את המד"ר לצורה מנורמלת על ידי חלוקה בפונקציה $a(x)$ ולקבל

$$y' + \frac{b}{a}y = \frac{c}{a}$$

במקרה כזה רצוי לעשות זאת, ונהוג לסמן $p = \frac{b}{a}$ ו- $q = \frac{c}{a}$ כך שמתקבלת המד"ר המנורמלת

$$y' + py = q$$

אשר שקולה למד"ר המקורית.

פתרון באמצעות גורם אינטגרציה

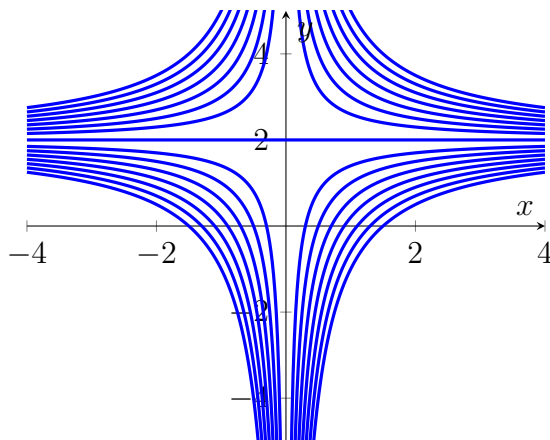
דוגמאות:

1. נפתור את המד"ר $xy' + y = 2$.
- במבט ראשון לא ברור איך, אבל נשים לב שאגף שמאל הוא נגזרת של מכפלה: $(xy)'$. לכן
- $$(xy)' = 2 \iff xy = 2x + C$$

לכן בקטעים שאינם מכילים את $x = 0$ נקבל אינסוף פתרונות $y = 2 + \frac{C}{x}$, כלומר לכל $C \in \mathbb{R}$ מתאים פתרון של המד"ר.

בקטעים המכילים את $x = 0$ נקבל רק את הפתרון $y \equiv 2$.

הנה מערכת צירים עם גרפים של מספר פתרונות שונים:



2. נפתור את המד"ר $y' + y = 2$.

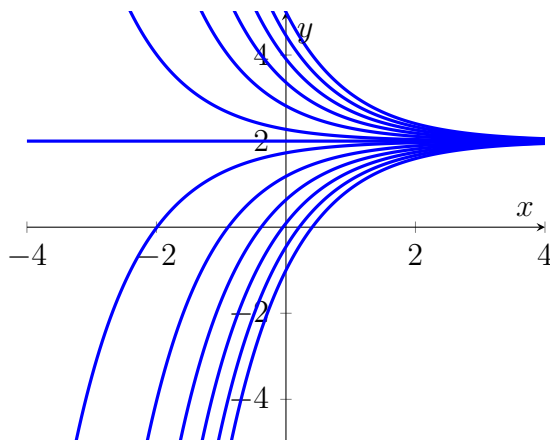
בניגוד לדוגמה הקודמת אין באגף שמאל נגזרת של מכפלה. העיקרון המנחה של פתרון בעזרת **גורם אינטגרציה** הוא לכפול את המד"ר בפונקציה $\mu(x)$ שאינה מתאפסת:

$$\mu y' + \mu y = 2\mu$$

כך שכעת כבר כתובה באגף שמאל נגזרת של מכפלה. כלומר צריך להתקיים במקרה זה $\mu'(x) = \mu(x)$, ואפשר לבחור $\mu(x) = e^x$:

$$e^x y' + e^x y = 2e^x \iff (e^x y)' = 2e^x \iff e^x y = 2e^x + C \iff y = 2 + Ce^{-x}$$

הנה שוב גרפים של מספר פתרונות:



נתאר את השיטה עבור מד"ר **מנורמלת** כללית $y' + py = q$. נכפול בגורם אינטגרציה $\mu(x) > 0$ (אם הוא אינו מתאפס, אפשר להניח בלי הגבלת הכלליות שהוא חיובי) ונקבל

$$\mu y' + p\mu y = q\mu$$

כדי שאגף שמאל יהיה נגזרת של מכפלה: $(\mu y)'$, צריך להתקיים $\mu' = p\mu$. לכן $\frac{\mu'}{\mu} = p$ ולכן

$$\int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} dx = \int p(x) dx \iff \ln \mu(x) = \int p(x) dx$$

נקבל אם כך נוסחה פשוטה לגורם האינטגרציה למד"ר מנורמלת לינארית מסדר ראשון: $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$.
נעיר שמספיק למצוא גורם אינטגרציה אחד על מנת להמשיך בתהליך, ולכן ניתן להתעלם מקבוע האינטגרציה.

צורת הפתרון

משפט 2: נניח כי $p(x), q(x)$ רציפות בקטע I . תהי $P(x)$ איזושהי פונקציה קדומה של $p(x)$ ותהי $G(x)$ פונקציה קדומה של $e^{P(x)}q(x)$. אז הפתרונות של המד"ר $y' + py = q$ הם
 $y(x) = G(x)e^{-P(x)} + Ce^{-P(x)}, C \in \mathbb{R}$

הערות:

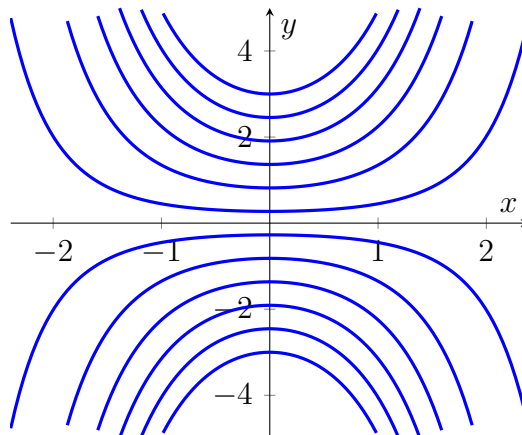
- נזכיר כי לכל פונקציה רציפה קיימת פונקציה קדומה (גם אם לעיתים לא ניתן לחשב אותה).
- יש אינסוף פתרונות מתאימים $y(x)$, אחד לכל ערך של הקבוע.
- לא כדאי לזכור את הנוסחאות, אלא רק להכיר את השיטה של כפל בגורם אינטגרציה.

דוגמאות:

1. נפתור את המד"ר $y' - xy = 0$.

לא נשתמש בנוסחה הכללית אלא בשיטה. נכפול בגורם אינטגרציה $\mu(x) = e^{\int -x dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$. נקבל $y(x) = Ce^{\frac{x^2}{2}}$.

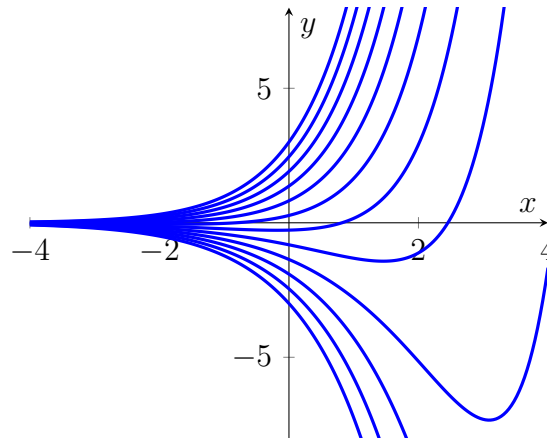
הנה שוב גרפים של מספר פתרונות:



2. נפתור את המד"ר $3y' - 3y = e^x$.

חשוב לנרמל את המד"ר לפני חישוב μ ! נקבל $y' - y = \frac{e^x}{3}$ ולכן $\mu(x) = e^{-x}$.
נקבל כעת $y(x) = \frac{xe^x}{3} + Ce^x$.

הנה שוב גרפים של מספר פתרונות:



1.3 מד"ר לינארית מסדר ראשון: בעיית התחלה, פתרון כללי ופרטי, ופתרון באמצעות הפרדת משתנים

בעיית התחלה

ראינו שלמד"ר לינארית מסדר ראשון יש באופן טיפוסי אינסוף פתרונות שונים: יש דרגת חופש אחת. הפתרונות אינם בהכרח נבדלים בקבוע אלא יש קבוע שמבדיל ביניהם: למשל, לא בהכרח $y = 2 + C$ אלא $y = 2 + \frac{C}{x}$. כדי לקבוע פתרון יחיד יש להוסיף תנאי נלווה שמכונה תנאי התחלה, $y(x_0) = y_0$.

הגדרה: בעית התחלה מסדר 1 היא מד"ר מסדר 1 יחד עם תנאי התחלה:

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

כאשר $x_0 \in \mathbb{R}$.

פתרון של בעית ההתחלה הוא פתרון $y(x)$ של המד"ר בקטע I אשר מכיל את x_0 עבורו $y(x_0) = y_0$.

דוגמאות:

1. נפתור את בעיית ההתחלה

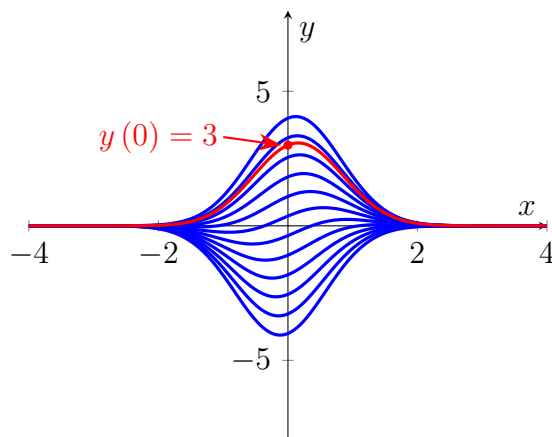
$$\begin{cases} y' + 2xy = e^{-x^2} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

ראשית נפתור את המד"ר בעזרת גורם אינטגרציה $\mu(x) = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$ ונקבל $y = xe^{-x^2} + Ce^{-x^2}$.

לבסוף נמצא את C מתוך תנאי ההתחלה:

$$3 = y(0) = C \Rightarrow y = xe^{-x^2} + 3e^{-x^2}$$

הנה ציור של מספר פתרונות בכחול, והפתרון של בעית ההתחלה באדום:



2. נפתור את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' + y = 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

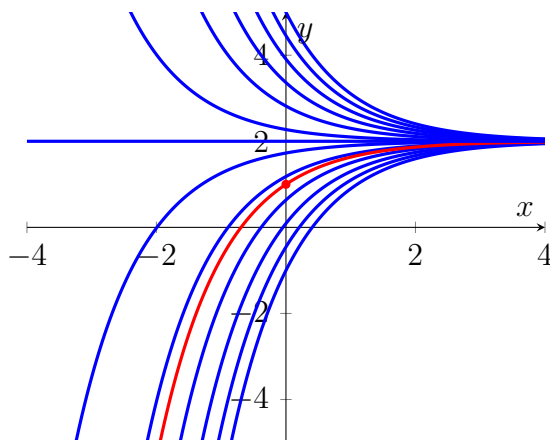
ראינו שהפתרון של המד"ר הוא $y = 2 + Ce^{-x}$. זה נקרא **הפתרון הכללי** של המד"ר.

נמצא פתרון לבעיית ההתחלה:

$$1 = y(0) = 2 + C \iff C = -1$$

לכן $y = 2 - e^{-x}$. זה נקרא **פתרון פרטי** של המד"ר.

הנה ציור של הפתרון הכללי בכחול, והפתרון הפרטי באדום, עם נקודת ההתחלה מסומנת:



באופן כללי, אם ניתן לכתוב נוסחה שמגלמת פתרונות רבים של המד"ר, זה מכונה פתרון כללי. ניתן לתאר אותו בצורה גרפית בתור אוסף של גרפים.

פתרון פרטי הוא גרף אחד מתוך האוסף. בציור רואים שבדוגמה האחרונה יש בדיוק פתרון פרטי אחד שעובר בכל נקודה נתונה, כלומר לכל תנאי התחלה. קוראים לזה **קיום יחידות** של פתרון לבעיית התחלה.

קיום יחידות עבור מד"ר לינארית מסדר 1

הוכחנו למעשה את המשפט הבא על ידי פתרון ישיר ומלא.

משפט 3. נניח כי p, q רציפות בקטע I ותהי $x_0 \in I$. אז לכל $y_0 \in \mathbb{R}$ מתקיים כי לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' + py = q \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

קיים פתרון יחיד $y(x)$ שמוגדר בכל הקטע I .

נוכיח גרסה של משפט קיום ויחידות למד"ר שאינה בהכרח לינארית בעתיד, כאשר אז לא נוכל באופן כללי לפתור באופן ישיר.

עיקרון הסופרפוזיציה למד"ר מסדר 1

נניח שנתונה מד"ר הומוגנית:

$$ay' + by = 0 \quad (2)$$

אם נתונים פתרונות y_1, y_2 שלה, אז לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $\alpha y_1 + \beta y_2$ גם פתרון. זה מבהיר עוד יותר את הכינוי מד"ר לינארית.

זה גם מוביל למשפט הבא, שמכונה לעיתים עיקרון הסופרפוזיציה.

משפט 4: יהי $I \subset \mathbb{R}$ קטע.

1. קבוצת הפתרונות של המד"ר ההומוגנית (2) הוא מרחב ווקטורי (תת-מרחב של אוסף הפונקציות הגזירות בקטע I).

2. אם $y_H(x)$ פתרון כללי של המד"ר ההומוגנית (2) בקטע I ו- $y_p(x)$ פתרון פרטי של המד"ר האי הומוגנית (1) בקטע I , אז

$$y_{NH}(x) = y_H(x) + y_p(x)$$

פתרון כללי של המד"ר האי הומוגנית בקטע I .

3. אם $y_1(x), y_2(x)$ פתרונות של המד"ר האי-הומוגנית (1) בקטע I , אז $y_2(x) - y_1(x)$ פתרון של המד"ר ההומוגנית (2) בקטע I .

המשפט מבטא את העובדה שהאופרטור הדיפרנציאלי $L[y]$ הוא טרנספורמציה לינארית.

דוגמאות:

1. ראינו שהפתרון הכללי של המד"ר $y' + y = 2$ הוא $y = 2 + Ce^{-x}$. נראה שזה מסתדר עם מסקנות המשפט.

קל לבדוק שפתרון הכללי של המד"ר ההומוגנית $y' + y = 0$ הוא $y = Ce^{-x}$. זהו אכן מרחב ווקטורי: $\text{span}\{e^{-x}\}$.

הפונקציה $y \equiv 2$ היא פתרון פרטי של המד"ר האי-הומוגנית כך שצורת הפתרון הכללי מתאימה בדיוק לסעיף 2.

לבסוף, בהינתן כל שני פתרונות, למשל: $y_1 = 2 + e^{-x}$ ו- $y_2 = 2 + 3e^{-x}$, ההפרש $y_2 - y_1 = 2e^{-x}$ הוא אכן פתרון של המד"ר ההומוגנית.

2. ראינו שהפתרון הכללי של המד"ר ההומוגנית $y' - xy = 0$ הוא $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$. זהו אכן מרחב ווקטורי בהתאם לסעיף 1.

אפשר להשתמש בסעיף 2 כדי למצוא מכך פתרון כללי למד"ר האי-הומוגנית $y' - xy = x$, אם נצליח **לנחש** פתרון פרטי שלה: למשל, $y \equiv -1$. נקבל פתרון כללי $y = -1 + Ce^{\frac{x^2}{2}}$.

הערה: כפי שנראה בעתיד, בסעיף 1 המימד של מרחב הפתרונות הוא בדרך כלל 1 (סדר המד"ר).

המקרה המיוחד של מד"ר הומוגנית: הפרדת משתנים

במקרה של מד"ר לינארית הומוגנית מסדר 1, ניתן להגיע לפתרון ללא שימוש בגורם אינטגרציה אלא בשיטה יותר ישירה שמכונה **הפרדת משתנים**. זה לא דווקא מומלץ, אבל נראה ששיטה זו עובדת גם אם המד"ר אינה לינארית, ואז היא תהיה יעילה מאוד.

לפני שנדגים אותה, נזכיר שלפי משפט 2, הפתרון הכללי של $y' + py = 0$ הוא $y = Ce^{-P(x)}$ כאשר $P' = p$.

דוגמה: נפתור את המד"ר $y' + xy = 0$. לפי הפתרון הכללי הנ"ל, צריך לצאת $y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$. נגיע לפתרון זה באופן אחר:

$$y' = -xy \Rightarrow \frac{y'}{y} = -x \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int -x dx = -\frac{x^2}{2} + c$$

האינטגרל שנותר הוא: $\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \ln |y(x)| + \tilde{c}$. לא נכתוב את $\tilde{c}$ היות שיש כבר קבוע שרירותי c באגף ימין, ונקבל:

$$\ln |y(x)| = -\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow |y(x)| = e^c e^{-\frac{x^2}{2}}$$

הביטוי e^c הוא קבוע חיובי שרירותי והיות שקיבלנו $y = \pm e^c e^{-\frac{x^2}{2}}$, נוכל לכתוב $y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$ כאשר $C \neq 0$ קבוע שרירותי.

לבסוף, במהלך הפתרון חילקנו ב- y , אבל $y \equiv 0$ כן פותר את המד"ר, ונוכל לכלול אותו על ידי כך שנאפשר בכל זאת $C = 0$. בסך הכל, הגענו בחזרה לפתרון הכללי הנכון.

נציין שיש מספר פרטים שיש לדייק. נעשה את זה בפעם הבאה, אבל זו השיטה של הפרדת משתנים ברמה הבסיסית ביותר.

בסימון כללי, כדי לפתור את $y' + py = 0$ נעביר את כל ה- x המפורשים לאגף ימין ואת היתר לאגף שמאל ("נפריד משתנים"):

$$y' + py = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = -p \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int -p(x) dx = -P(x) + c$$

לכן $\ln |y(x)| = -P(x) + c$ ולכן $|y| = e^c e^{-P(x)} = Ce^{-P(x)}$ כאשר $C > 0$ שרירותי. לבסוף נכלול את האפשרות $y \equiv 0$ ונסיר את הערך המוחלט: עבור $C \in \mathbb{R}$ כפי שקיבלנו קודם.

דוגמה: נפתור את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' - 3y = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

ראשית נקבל

$$\frac{y'}{y} = 3 \Rightarrow \ln |y| = 3x + c \Rightarrow y = Ce^{3x}$$

$$\text{לבסוף } 2 = y(1) = Ce \Rightarrow C = 2e^{-1} \text{ כלומר } y = 2e^{x-1}$$

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. נגזרות חד צדדיות והקשר שלהן לגזירות ולנגזרת.
2. וקטורים במישור: $\vec{v} = (a, b)$.
3. הקשר בין השיפועים של קווים ניצבים בגיאומטריה אנליטית (מכפלתם -1).

“ I’ve learned something about my own hunches: the only time they turn out to be meaningful is when I ignore them.

”

Steven Brust, The Book of Jhereg