

אלגברה לינארית לחשמל · 05091724

שבוע 10

לכסון, קיילי-המילטון, מכפלה פנימית

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1	לכסון (המשך)
2	1.1	פולינום אופייני, וסוגי ריבוי של ערכים עצמיים (המשך)
3	1.2	תכונות מתקדמות של ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, ולכסון
5	1.3	טריקים לצורך לכסון
6	1.4	משפט קיילי-המילטון
9	2	מרחבי מכפלה פנימית
9	2.1	מרחבי מכפלה פנימית
13	2.2	הנורמה המושרית

When you need a counterexample
in linear algebra



1 | לכסון (המשך)

1.1 פולינום אופייני, וסוגי ריבוי של ערכים עצמיים (המשך)

ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי

הגדרה 1.

1. תהי $T : V \rightarrow V$ העתקה לינארית, כאשר V הוא מרחב וקטורי מממד סופי, ויהי λ ערך עצמי של T .

- א. הריבוי האלגברי של λ הוא הריבוי של λ כשורש של הפולינום האופייני p_T .
 - ב. הריבוי הגיאומטרי של λ הוא המימד $\dim(\ker(\lambda I_V - T))$ של המרחב העצמי השייך ל- λ .
2. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ ויהי λ ערך עצמי של A .

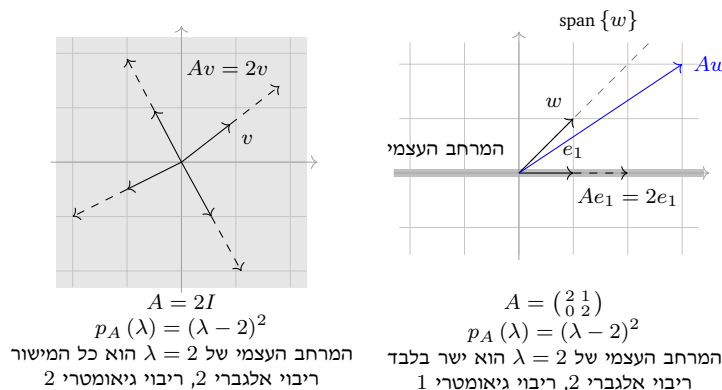
- א. הריבוי האלגברי של λ הוא הריבוי של λ כשורש של הפולינום האופייני p_A .
- ב. הריבוי הגיאומטרי של λ הוא המימד $\dim(\text{null}(\lambda I - A))$ של המרחב העצמי השייך ל- λ .

כלומר, הריבוי הגיאומטרי שווה למספר המירבי של וקטורים עצמיים בלתי תלויים אשר ניתן למצוא עבור λ .

הערות:

- אם λ ערך עצמי, אז הריבוי האלגברי והריבוי הגיאומטרי שניהם גדולים או שווים ל-1 (לפי ההגדרה של ערך עצמי, והיותו שורש של הפולינום האופייני).
- הריבוי הגיאומטרי שווה למימד של מרחב הפתרונות של $(\lambda I - A)v = 0$. לכן זהו למעשה $n - \text{rank}(\lambda I - A)$ (וכנ"ל עבור העתקה לינארית).

נשווה שני מקרים בעלי אותו פולינום אופייני, שבהם הריבוי הגיאומטרי שונה:



הריבוי הגיאומטרי קטן או שווה מהריבוי האלגברי

משפט 2. אם λ הוא ערך עצמי של העתקה לינארית T או מטריצה A , אז הריבוי הגיאומטרי של λ קטן או שווה מהריבוי האלגברי של λ .

1.2 תכונות מתקדמות של ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, ולכסון

וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים הם בלתי תלויים לינארית.

משפט 3. אם $v_1, \dots, v_k$ הם וקטורים עצמיים של העתקה לינארית T או מטריצה A אשר שייכים לערכים עצמיים שונים $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ בהתאמה, אז $v_1, \dots, v_k$ בלתי תלויים לינארית.

תנאים ללכסינות

משפט 4. יהי $\mathbb{F}$ שדה. הסעיפים הבאים מתייחסים ללכסינות מעל $\mathbb{F}$ של העתקה לינארית $T : V \rightarrow V$ כאשר V הוא מרחב וקטורי ממימד n , או של מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$.

1. T (או A) לכסין אם ורק אם סכום הריבויים הגיאומטריים של הערכים העצמיים שלו שווה בדיוק ל- n .
2. א. אם סכום הריבויים האלגבריים של הערכים העצמיים שלו קטן מ- n , אז T (או A) אינו לכסין.
ב. אם סכום הריבויים האלגבריים של הערכים העצמיים שלו שווה בדיוק ל- n , אז T (או A) לכסין אם ורק אם לכל ערך עצמי מתקיים שהריבוי האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי.

הערה: בתנאי המשפט, הפולינום האופייני הוא פולינום ממעלה n . לכן, לפי המשפט היסודי של האלגברה, במקרה $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ סכום הריבויים האלגבריים שווה בדיוק ל- n .

מסקנה. בתנאי המשפט, אם ל- T (או A) יש n ערכים עצמיים שונים, אז הוא לכסין.

דוגמה מלאה של לכסון

האם המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

לכסינה? אם כן, מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך שמתקיים $P^{-1}AP = D$.

נחשב פולינום אופייני:

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 3) + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

לכן הערכים העצמיים הם $\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = 2, 1$.לכן המטריצה לכסינה: יש n ערכים עצמיים שונים.נמצא וקטור עצמי עבור כל ערך עצמי. עבור $\lambda = 2$, התנאי הוא

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff a = b \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נוכל אם כן לבחור

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

עבור $\lambda = 1$,

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff b = 2a \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

נוכל אם כן לבחור

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

לכן אם ניקח

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

נקבל מטריצה הפיכה אשר מקיימת

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

עוד שמורות דמיון

ראינו בעבר שלמטריצות דומות יש אותה דרגה, הפיכות, עקבה ודטרמיננטה. המשפט הבא מוסיף עוד שמורות דמיון לרשימה.

משפט 5. נניח כי $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ דומות.

1. הפולינומים האופייניים שלהן שווים: $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$.
2. ל- A, B יש את אותם הערכים העצמיים, כולל ריבוי אלגברי וכולל ריבוי גיאומטרי.
3. A לכסינה אם ורק אם B לכסינה.

נזכיר שאף אחת מהשמורות (וגם כולן ביחד) לא מספיקות כדי שהמטריצות יהיו דומות. הן כולן משמשות כדי **לפסול** דמיון (או לדברים אחרים, אבל לא בשביל להוכיח דמיון). למרות זאת, כעת, נוכל סוף סוף לנסח תנאי אשר גורר דמיון.

משפט 6. אם $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ לכסינות, ובנוסף הערכים העצמיים שלהן שווים (כולל ריבוי אלגברי), אז A, B דומות.

זהירות: מטריצות לא לכסינות בעלות ערכים עצמיים זהים, הן לאו דווקא דומות.

אם הפולינום האופייני ניתן לפיצול אז יש דמיון למטריצה משולשת עליונה

ראינו שיש מטריצות לכסינות, ויש מטריצות לא לכסינות - אפילו מעל $\mathbb{C}$ (שם סכום הריבויים האלגבריים הוא תמיד n).

מסתבר שעבור דמיון למטריצה משולשת, המצב יותר טוב.

משפט 7.

1. תהי $T : V \rightarrow V$ העתקה לינארית, כאשר V הוא מרחב וקטורי ממימד סופי. אם סכום הריבויים האלגבריים של הערכים העצמיים של T מעל $\mathbb{F}$ הוא $\dim(V)$, אז קיים בסיס עבורו המטריצה המייצגת של T היא משולשת עליונה.
2. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. אם סכום הריבויים האלגבריים של הערכים העצמיים של A מעל $\mathbb{F}$ הוא n , אז A דומה מעל $\mathbb{F}$ למטריצה משולשת עליונה.

בפרט, אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, כל מטריצה דומה למטריצה משולשת עליונה (למרות שלא כל מטריצה היא לכסינה).

1.3 טריקים לצורך לכסון

טריקים ועובדות שימושיות בקשר ללכסון

משפט 8.

1. אם A מטריצה משולשת, אז איברי האלכסון הראשי של A הם הערכים העצמיים של A (כולל ריבוי אלגברי).
2. אם סכום הריבויים האלגבריים שווה ל- n , אז $|A|$ שווה למכפלת הערכים העצמיים ו- $\text{tr}(A)$ שווה לסכום הערכים העצמיים (כולל ריבוי אלגברי).
3. A לא הפיכה אם ורק אם $\lambda = 0$ הוא ערך עצמי של A .
4. אם סכום האיברים בכל שורה של A זהה, אז הסכום הזהה הוא ערך עצמי עם וקטור עצמי

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. ל- A^t יש אותו פולינום אופייני כמו A (ולכן בפרט אותם ערכים עצמיים כולל ריבוי אלגברי).

6. אם סכום האיברים בכל עמודה של A זהה, אז הסכום הזה הוא ערך עצמי (אין קיצור דרך למציאת וקטור עצמי מתאים).
7. אם גם $B \in M_n(\mathbb{F})$, אז למטריות AB, BA יש אותם ערכים עצמיים (לאו דווקא כולל ריבוי אלגברי).

דוגמה: הערכים העצמיים של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

הם 1, 4, 6, ולכן בפרט היא לכסינה!

דוגמה לשימוש בטריקים

נתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

אפשר לראות שאם מחסירים 1 מהאלכסון, מתקבלת מטריצה בדרגה 1.

לכן $\lambda = 1$ הוא ערך עצמי, עם ריבוי גיאומטרי $3 = 4 - 1$.

לכן הריבוי האלגברי של 1 הוא **לפחות** 3.

כעת, אפשר לשים לב שהעקבה היא 8, וזהו סכום הערכים העצמיים. לכן הערכים העצמיים הם 1, 1, 1, 5.

אפשר גם מלכתחילה לשים לב שסכום כל שורה הוא 5, ולכן $\lambda = 5$ הוא ערך עצמי.

נעיר לבסוף שסכום הריבויים הגיאומטריים הוא 4, ולכן A לכסינה!

1.4 משפט קיילי-המילטון

הצבת מטריצה בתוך פולינום

הגדרה 9. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$, ויהי $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. נסמן $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, ונגדיר

$$f(A) = a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 I$$

דוגמה: ניקח למשל את $f(x) = 2x^2 + x + 1$ עם

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל

$$\begin{aligned} f(A) = 2A^2 + A + I &= 2 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -7 \\ 14 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ניסוח משפט קיילי-המילטון

משפט 10. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. אז $p_A(A) = 0$.

כלומר, כאשר מציבים את A בתוך הפולינום האופייני שלה, מקבלים את מטריצת האפס.

דוגמה: ניקח שוב את

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

חישבנו בעבר את הפולינום האופייני שלה: $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$. ואכן,

$$\begin{aligned} p_A(A) = A^2 - 3A + 2I &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

הנה ראשית הוכחה שגויה: $p_A(A) = |A \cdot I - A| = |0| = 0$. מדוע היא שגויה?

דוגמאות לשימוש במשפט קיילי-המילטון

1. נתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

מהי A^{-1} ?

ראשית, הפולינום האופייני הוא

$$\begin{aligned}
 p_A(\lambda) &= |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 \\ -4 & \lambda - 5 & -6 \\ -7 & -8 & \lambda \end{vmatrix} \\
 &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda - 48) + 2(-4\lambda - 42) - 3(7\lambda - 3) = \lambda^3 - 6\lambda^2 - 72\lambda - 27
 \end{aligned}$$

לכן לפי משפט קיילי-המילטון,

$$0 = p_A(A) = A^3 - 6A^2 - 72A - 27I$$

לכן

$$I = \frac{1}{27}(A^3 - 6A^2 - 72A) = A \cdot \left(\frac{1}{27}A^2 - \frac{6}{27}A - \frac{72}{27}I \right)$$

ולכן

$$A^{-1} = \frac{1}{27}A^2 - \frac{6}{27}A - \frac{72}{27}I$$

באופן זה, אפשר לחשב את A^{-1} באמצעות פעולות אלגבריות ישירות (כפל מטריצות, חיבור) במקום פעולות מורכבות יותר.

נשאיר את המשך החישוב לבדיקה עצמית.

2. נתונה כעת

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

מהי A^{11} ?

ראשית,

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 2$$

לכן לפי משפט קיילי-המילטון,

$$0 = p_A(A) = A^2 - 5A - 2I \iff A^2 = 5A + 2I$$

לכן

$$\begin{cases} A^3 = A^2 \cdot A = (5A + 2I) \cdot A = 5A^2 + 2A = 5(5A + 2I) + 2A = 27A + 10I \\ A^4 = A^3 \cdot A = (27A + 10I) \cdot A = 27A^2 + 10A = 27(5A + 2I) + 10A = 145A + 54I \\ A^8 = (A^4)^2 = (145A + 54I)^2 = 145^2(5A + 2I) + 2 \cdot 145 \cdot 54A + 54^2I \end{cases}$$

לכן בסך הכל

$$\begin{aligned}
 A^{11} &= A^8 \cdot A^3 = ((5 \cdot 145^2 + 108 \cdot 145)A + (2 \cdot 145^2 + 54^2)I) \cdot (27A + 10I) \\
 &= 3261195(5A + 2I) + 2421932A + 449660I \\
 &= 18727907 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 6972050 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25699957 & 37455814 \\ 56183721 & 81883678 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

באופן זה, חישבנו במקוצר מכפלה של 11 מטריצות.

2 | מרחבי מכפלה פנימית

2.1 מרחבי מכפלה פנימית

מוטיבציה למכפלה פנימית

המכפלה הסקלרית היא המודל וההשראה למכפלה פנימית שנגדיר ונדגים מיד. עבור $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ (למשל), למכפלה הסקלרית יש ביטוי גיאומטרי וביטוי אלגברי

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \theta = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

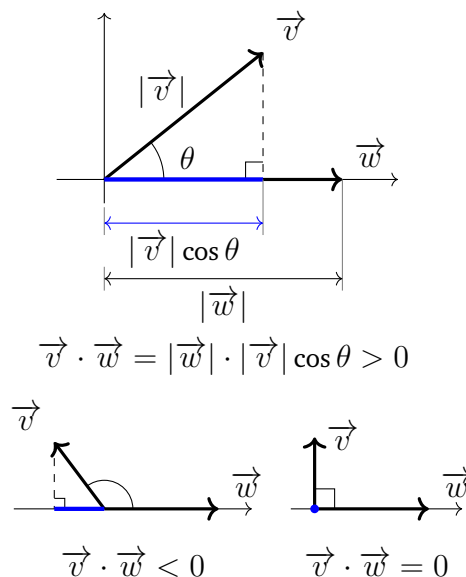
כאשר θ היא הזווית בין $\vec{v}$ לבין $\vec{w}$.

היא מאפשרת למדוד את **מידת החפיפה** בין הוקטורים $\vec{v}, \vec{w}$.

• התוצאה היא אפס אם ורק אם $\vec{v} \perp \vec{w}$ (ניצבים).

• עבור גדלים נתונים $|\vec{v}|, |\vec{w}|$, התוצאה היא מקסימלית כאשר $\theta = 0$ ולכן כאשר $\vec{v}, \vec{w}$ מצביעים באותו כיוון; והיא מינימלית כאשר $\theta = \pi$ ולכן כאשר $\vec{v}, \vec{w}$ מנוגדים זה לזה.

נראה את הטענות האלו בציור:



למכפלה הסקלרית יש גם שימושים נוספים, כמו למשל חישוב של היטל או $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$ ועוד, ואת כל התועלת הזו נרצה לייצא למרחבים וקטורים כלליים.

הגדרה של מכפלה פנימית

המכפלה הסקלרית מקיימת שלוש תכונות יסודיות, שיהיו הבסיס למושג של מכפלה פנימית.

הגדרה 11. יהי V מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{F}$ שהוא $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$. **מכפלה פנימית** היא פונקציה $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^2 \rightarrow \mathbb{F}$, כלומר, פעולה $\langle v, w \rangle$ על שני וקטורים שתוצאתה סקלר, כך שמתקיימים התנאים הבאים:

- חיוביות בהחלט:** לכל $v \in V$, $\langle v, v \rangle \geq 0$ (כלומר, ממשי אי-שלילי) ויש שוויון אם ורק אם $v = 0$.
- לינאריות ברכיב הראשון:** לכל $u, v, w \in V$ ו- $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$.
- סימטריות בהצמדה:** לכל $v, w \in V$, $\langle w, v \rangle = \overline{\langle v, w \rangle}$.

מרחב וקטורי ביחד עם מכפלה פנימית מכונה **מרחב מכפלה פנימית**.

כלומר, בהינתן מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$, ננסה לחקות את המכפלה הסקלרית על ידי הגדרה של פעולה

$$V \ni v, w \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{F}$$

שלוקחת כל שני וקטורים ומייצרת מהם "מכפלה" שהיא סקלר, כך שמתקיימות אותן תכונות יסודיות כמו במקרה של מכפלה סקלרית.

הערות:

- במקרה הממשי התכונה השלישית היא פשוט סימטריות.
- במקרה המרוכב ההצמדה בתכונה השלישית הכרחית. לולא הייתה מתקיימת לינאריות מלאה גם ברכיב השני, ואז לכל $v \neq 0$ היינו מקבלים

$$\langle iv, iv \rangle = i^2 \langle v, v \rangle = -\langle v, v \rangle$$

בסתירה לחיוביות בהחלט.

- בפיסיקה, נהוג להחליף את התכונה השנייה בלינאריות ברכיב השני (זה לא משנה במקרה הממשי).

המוטיבציה היא שבעזרת מכפלה פנימית נוכל לעשות הכל: להבין זוויות וניצבות, למדוד גודל ומרחק, ועוד. מיד לאחר כמה דוגמאות, נכיר תכונות בסיסיות של מכפלה פנימית ונראה כיצד ניתן בעזרתה למדוד ניצבות, גודל ומרחק.

דוגמאות של מרחבי מכפלה פנימית

דוגמאות:

1. כמו ב- $\mathbb{R}^3$ (וקטורים מרחביים), אפשר להגדיר מכפלה סקלרית על $\mathbb{R}^n$ עבור $n \in \mathbb{N}$ כללי, ומתקבלת מכפלה פנימית:

$$u \cdot v = \sum_{k=1}^n u_k v_k, \quad u, v \in \mathbb{R}^n$$

באופן דומה, עבור $\mathbb{C}^n$, אפשר להכליל את המכפלה הסקלרית על ידי

$$u \cdot v = \sum_{k=1}^n u_k \overline{v_k}, \quad u, v \in \mathbb{C}^n$$

הצמוד מבטיח שאכן תתקיים חיוביות בהחלט (בין היתר).

2. אפשר להגדיר מכפלה פנימית בין מטריצות באופן דומה למכפלה הסקלרית. למשל, ניקח $V = M_{2,3}(\mathbb{R})$. אפשר להגדיר

$$\begin{aligned}\langle A, B \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{23}\end{aligned}$$

צריך כמובן להוכיח שזו אכן מכפלה פנימית. נשאיר את הבדיקה הזו כתרגיל. נעיר שאפשר לכתוב את אותה מכפלה פנימית גם בדרכים נוספות. ראשית, בעזרת סימן הסכום,

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 a_{ij}b_{ij}$$

שנית, וזה כבר קצת יותר מוזר, נשים לב כי

$$\begin{aligned}\text{tr}(B^t A) &= \text{tr} \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{tr} \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{21}a_{21} & * & * \\ * & b_{12}a_{12} + b_{22}a_{22} & * \\ * & * & b_{13}a_{13} + b_{23}a_{23} \end{pmatrix} \\ &= b_{11}a_{11} + b_{21}a_{21} + b_{12}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{13}a_{13} + b_{23}a_{23} = \langle A, B \rangle\end{aligned}$$

כלומר, בעצם $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$. אפשר להכליל למרחב $M_{m,n}(\mathbb{R})$ על ידי

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ij}$$

באופן דומה, עבור המרחב $M_{m,n}(\mathbb{C})$,

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(\overline{B^t} A) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}\overline{b_{ij}}$$

מיד נדייק את הגדרת המטריצה $\overline{B^t}$.

3. אפשר להגדיר מכפלה פנימית על מרחב הפולינומים $V = \mathbb{R}_2[x]$ על ידי

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \langle px^2 + qx + r, \alpha x^2 + \beta x + \gamma \rangle = p\alpha + q\beta + r\gamma$$

כמובן, יש להראות שזו אכן מכפלה פנימית. אבל, מסתבר שמכפלה פנימית שימושית יותר היא

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

כאשר $[a, b]$ הוא קטע שבוחרים לפי הצורך (קטעים שונים נותנים תוצאות שונות, ולכל בחירה של קטע מתאימה מכפלה פנימית).
למעשה, מכפלה פנימית זו תקפה למרחב $\mathbb{R}_n[x]$ עבור n כלשהו, ובעצם גם למרחב $\mathbb{R}[x]$, ואפילו מעבר לכך, עבור המרחב

$$V = C[a, b]$$

של הפונקציות הרציפות $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
4. דוגמה חשובה היא $C[a, b]$: מרחב הפונקציות הרציפות $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{F}$. המכפלה הפנימית המרכזית שנראה היא המכפלה הפנימית האינטגרלית:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

הוכיחו בתור תרגיל שזו אכן מכפלה פנימית.

בכל הדוגמאות הללו, המכפלה הפנימית המרכזית המתוארת מכונה **המכפלה הפנימית הסטנדרטית** באותו מרחב וקטורי.

המטריצה הצמודה

הגדרה 12. תהי $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$. **המטריצה הצמודה** של A היא המטריצה $n \times m$ המוגדרת על ידי

$$(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

הערה: בפיסיקה נהוג לסמן את הצמוד המרוכב על ידי כוכבית: z^* במקום $\bar{z}$, ומטריצה צמודה מסומנת $A^\dagger$ במקום A^* .

דוגמה: למשל,

$$\begin{pmatrix} 2 & i \\ 1 & 3+i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -i & 3-i \end{pmatrix}$$

באמצעות המטריצה הצמודה, אפשר לכתוב את המכפלה הפנימית הסטנדרטית במרחב $M_{m,n}(\mathbb{C})$ באופן הבא:

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^* A)$$

תכונות בסיסיות במרחבי מכפלה פנימית

משפט 13. יהי V מרחב מכפלה פנימית.

1. לכל $v \in V$ מתקיים כי $\langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0$.
2. יש לינאריות בהצמדה ברכיב השני: לכל $u, v, w \in V$ ולכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$,

$$\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \overline{\alpha} \langle u, v \rangle + \overline{\beta} \langle u, w \rangle$$

2.2 הנורמה המושרית

הנורמה המושרית ממכפלה פנימית

הגדרה 14. נניח ש- $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית. **הנורמה המושרית** על V מהמכפלה הפנימית היא הפונקציה $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$ שמוגדרת על ידי

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

הרעיון הוא ש- $\|v\|$ מודד את הגודל של v (או את אורכו). השם "נורמה" מצריך עוד הצדקה, כפי שנסביר מיד.

לפעם הבאה

- מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני שבוע הבא:
1. מספרים מרוכבים: צמוד, ערך מוחלט, והתכונות שלהם (שבוע 2).
 2. המכפלה הסקלרית ב- $\mathbb{R}^n$ והקשר שלה לאורך ולזווית.

“ It is a mistake to think you can solve any major problems just with potatoes.

”

Terry Pratchett, Wyrds Sisters