

אלגברה לינארית לחשמל · 05091724

שבוע 7

טרנספורמציות לינאריות

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1 העתקות לינאריות
2	1.1 הגדרה של העתקה לינארית
5	1.2 תמונה וגרעין של העתקה לינארית
9	1.3 משפט המימדים השני
11	1.4 מוצגות היטב של העתקה לינארית על איברי בסיס
12	1.5 איזומורפיזם
14	1.6 פעולות על העתקות לינאריות

Why don't the later Matrix films
spoil the memory of the first one?

No matrix action affects the origin.

1 | העתקות לינאריות

1.1 הגדרה של העתקה לינארית

דוגמה מקדימה

נניח כי $A_{m \times n}$ היא מטריצה מעל שדה $\mathbb{F}$. למשל,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

נגדיר פונקציה (באלגברה לינארית, משתמשים בדרך כלל במילה **טרנספורמציה** במקום פונקציה) על ידי $T(x) = Ax$ למשל,

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ -13 \end{pmatrix}$$

בדוגמה, $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. באופן כללי, $T: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$.

הנה עוד כמה תוצאות של הפעלת T , בדוגמה. אם ניקח את הקלט הקודם מוכפל ב-2, נקבל את הפלט הקודם מוכפל ב-2:

$$T \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -18 \\ -26 \end{pmatrix} = 2 \cdot T \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

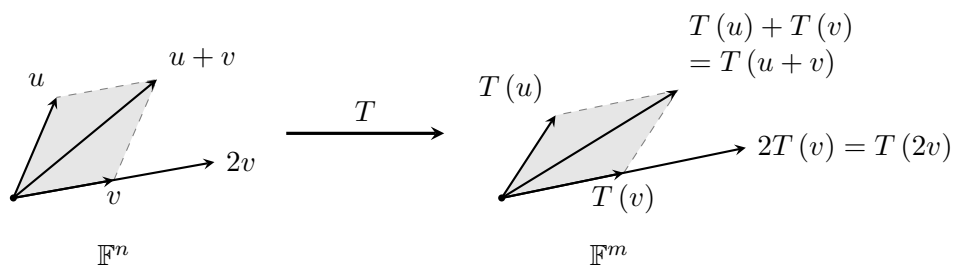
ניקח כעת קלט אחר, כמו

$$T \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 22 \\ 34 \end{pmatrix}$$

ואז ניקח בתור קלט את הסכום של שניים מהמקרים הקודמים:

$$T \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ -13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 22 \\ 34 \end{pmatrix}$$

קיבלנו את הסכום של שתי התוצאות המתאימות. נצייר שני וקטורים u ו- v כחצים היוצאים מהראשית, ונראה מה T עושה להם:



מקבילית עוברת למקבילית, וקרן עוברת לקרן

אלו תכונות שיאפיינו טרנספורמציות לינאריות.

משפט 1. תהי $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ כאשר $\mathbb{F}$ שדה, ונגדיר $T : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ על ידי $T(v) = Av$. אז:

1. לכל $\alpha \in \mathbb{F}$, $v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים $T(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot T(v)$.
2. לכל $u, v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים $T(u + v) = T(u) + T(v)$.

הגדרה של טרנספורמציה לינארית

הגדרה 2. נניח כי V, W הם מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. העתקה (טרנספורמציה) לינארית מ- V ל- W היא פונקציה $T : V \rightarrow W$ כך שמתקיימים שני התנאים הבאים.

1. לכל $\alpha \in \mathbb{F}$, $v \in V$ מתקיים $T(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot T(v)$.
2. לכל $u, v \in V$ מתקיים $T(u + v) = T(u) + T(v)$.

דוגמאות:

1. נגדיר $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ על ידי

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = adx^3 - (a + d)x^2 + 3abcx - 4(a + d)$$

האם זו העתקה לינארית?
למשל,

$$T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x^3 - 2x^2 - 8, \quad T \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4x^3 - 4x^2 - 16$$

לכן

$$T \left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \neq 2 \cdot T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן זו לא העתקה לינארית.

2. ננסה שוב. נגדיר $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ על ידי

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ax^3 - 2bx^2 + (a + b)x - 4(a + d)$$

נראה שזו אכן העתקה לינארית, לפי ההגדרה. כלומר, נבדוק את שני התנאים, באופן כללי.

$$\begin{aligned} T\left(\alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) &= T\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} = \alpha ax^3 - 2\alpha bx^2 + (\alpha a + \alpha b)x - 4(\alpha a + \alpha d) \\ &= \alpha(ax^3 - 2bx^2 + (a+b)x - 4(a+d)) = \alpha \cdot T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

באופן דומה,

$$\begin{aligned} T\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) &= T\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \\ &= (a_1 + a_2)x^3 - 2(b_1 + b_2)x^2 + (a_1 + a_2 + b_1 + b_2)x - 4(a_1 + a_2 + d_1 + d_2) \\ &= a_1x^3 - 2b_1x^2 + (a_1 + b_1)x - 4(a_1 + d_1) + a_2x^3 - 2b_2x^2 + (a_2 + b_2)x - 4(a_2 + d_2) \\ &= T\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. אפשר לחשוב על גזירה בתור העתקה $D: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$, והיא לינארית. למשל,

$$D(x^3 - 2x + 3) = 3x^2 - 2$$

למעשה, ניתן להגדיר זאת גם אם השדה אינו $\mathbb{R}$, בעזרת אותם חוקים שאנו רגילים אליהם (ובלי כל קשר לגבולות):

$$\begin{cases} D: \mathbb{F}[x] \rightarrow \mathbb{F}[x] \\ D(a_n x^n + \dots + a_0) = na_n x^{n-1} + \dots + a_1 \end{cases}$$

נעיר שאפשר גם לקבוע את תחום ההגדרה ואת הטווח של הגזירה באופן הבא: $D: \mathbb{F}_n[x] \rightarrow \mathbb{F}_{n-1}[x]$ (כל עוד $n \geq 1$).

4. נגדיר $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ על ידי

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b + c \\ c - a \\ 2c - a \\ b + c \end{pmatrix}$$

זו העתקה לינארית, כי בעצם

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

וראינו שהעתקה שפועלת כך, על ידי כפל במטריצה נתונה, היא לינארית.

תכונות בסיסיות של העתקות לינאריות

משפט 3. תהי $T : V \rightarrow W$ העתקה לינארית.

1. $T(0) = 0$
 2. לכל $v \in V$ מתקיים $T(-v) = -T(v)$
 3. לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $u, v \in V$ מתקיים $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$
- באופן כללי יותר, לכל צירוף לינארי מתקיים כי
- $$T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n)$$

נעיר שכאשר אנו כותבים " $T : V \rightarrow W$ העתקה לינארית", משתמע כי V, W הם מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה.

1.2 תמונה וגרעין של העתקה לינארית

תמונה

הגדרה 4. תהי $T : V \rightarrow W$ העתקה לינארית. **התמונה** של T היא

$$\text{Im}(T) = \{w \in W \mid \exists v \in V : T(v) = w\}$$

דוגמאות:

1. ניקח את הדוגמה של $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ שמוגדרת על ידי

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ax^3 - 2bx^2 + (a+b)x - 4(a+d)$$

כדי להבין את התמונה, ניקח איבר כללי בטווח: $\delta x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. נבין מהו התנאי לכך שקיימים $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ עבורם

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ax^3 - 2bx^2 + (a+b)x - 4(a+d) = \delta x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

נדגיש שזה תלוי במיהם α, β, γ . כלומר, אנו מחפשים תנאי עליהם. התנאי הוא למעשה: $\delta x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma \in \text{Im}(T)$ אם ורק אם למערכת המשוואות

$$\begin{cases} a = \delta \\ -2b = \alpha \\ a + b = \beta \\ -4(a+d) = \gamma \end{cases}$$

קיים פתרון. נבדוק:

$$\cdot \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \beta \\ -4 & 0 & 0 & -4 & \gamma \end{array} \right) \rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{\alpha}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \gamma + 4\delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta - \delta + \frac{\alpha}{2} \end{array} \right)$$

לכן קיים פתרון אם ורק אם $\beta = \delta - \frac{\alpha}{2}$, כלומר,

$$\cdot \operatorname{Im}(T) = \left\{ \delta x^3 + \alpha x^2 + \left(\delta - \frac{\alpha}{2} \right) x + \gamma : \alpha, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\}$$

במילים אחרות, T אינה על (למשל, $x^3 \notin \operatorname{Im}(T)$).
 2. ניקח את הדוגמה של $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ המוגדרת על ידי

$$\cdot T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b + c \\ c - a \\ 2c - a \\ b + c \end{pmatrix}$$

כעת

$$\cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \operatorname{Im}(T) \iff \exists a, b, c \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b + c \\ c - a \\ 2c - a \\ b + c \end{pmatrix}$$

כלומר, אם ורק אם למערכת הבאה קיים פתרון:

$$\cdot \begin{cases} a + b + c = \alpha \\ c - a = \beta \\ 2c - a = \gamma \\ b + c = \delta \end{cases}$$

נבדוק:

$$\cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ -1 & 0 & 1 & \beta \\ -1 & 0 & 2 & \gamma \\ 0 & 1 & 1 & \delta \end{array} \right) \rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 & \beta + \alpha \\ 0 & 0 & 1 & \gamma - \beta \\ 0 & 0 & 0 & \gamma - 2\beta + \delta - \alpha \end{array} \right)$$

לכן קיים פתרון אם ורק אם $\gamma - 2\beta + \delta - \alpha = 0$. למשל,

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \operatorname{Im}(T), \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im}(T)$$

בסך הכל,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(T) &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} : \gamma - 2\beta + \delta - \alpha = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \alpha + 2\beta - \gamma \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

בפרט, אנו מקבלים שהתמונה (בדוגמה זו לפחות) היא תת מרחב של הטווח $\mathbb{R}^4$.
 3. במקרה של גזירה $D : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_{n-1}[x]$, בדקו שהתמונה היא $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

גרעין

הגדרה 5. תהי $T : V \rightarrow W$ העתקה לינארית. הגרעין של T מוגדר על ידי

$$\ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$$

דוגמאות:

1. ניקח את הדוגמה של $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ שמוגדרת על ידי

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ax^3 - 2bx^2 + (a+b)x - 4(a+d)$$

אז

$$\ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ax^3 - 2bx^2 + (a+b)x - 4(a+d) = 0 \right\}$$

התנאי

$$ax^3 - 2bx^2 + (a+b)x - 4(a+d) = 0$$

מתקיים אם ורק אם

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ a + b = 0 \\ a + d = 0 \end{cases} \iff a = b = d = 0$$

לכן

$$\ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2. ניקח את הדוגמה של $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ המוגדרת על ידי

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b + c \\ c - a \\ 2c - a \\ b + c \end{pmatrix}$$

הפעם

$$\begin{pmatrix} a + b + c \\ c - a \\ 2c - a \\ b + c \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ c - a = 0 \\ 2c - a = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0$$

לכן $\ker(T) = \{0\}$.

3. במקרה של גזירה $D : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_{n-1}[x]$, בדקו שהגרעין הוא

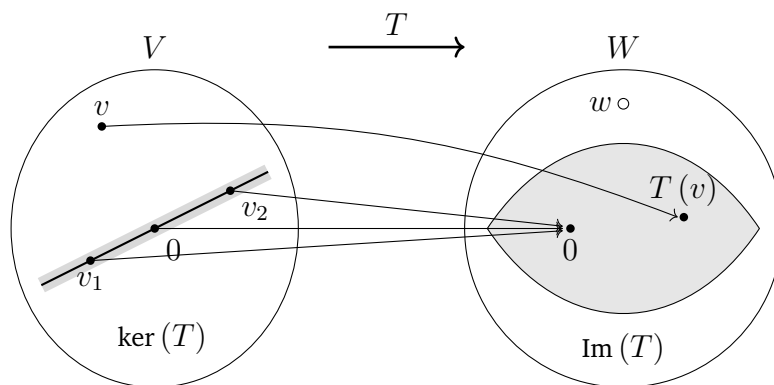
$$\ker(D) = \{c : c \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{1\}$$

תכונות של תמונה וגרעין

משפט 6. תהי $T : V \rightarrow W$ העתקה לינארית.

1. הגרעין $\ker(T)$ הוא תת מרחב של V .
 2. התמונה $\text{Im}(T)$ היא תת מרחב של W .
 3. T על אם ורק אם $\text{Im}(T) = W$.
 4. T חד חד ערכית אם ורק אם $\ker(T) = \{0\}$.
 5. אם $v_1, \dots, v_n$ פורשים את V אז $T(v_1), \dots, T(v_n)$ פורשים את $\text{Im}(T)$.
 6. אם T חד חד ערכית ובנוסף $v_1, \dots, v_n$ בלתי תלויים לינארית, אז $T(v_1), \dots, T(v_n)$ גם בלתי תלויים לינארית.
- בפרט, במקרה זה, $\dim(\text{Im}(T)) \geq \dim(V)$ (כאשר יתכן שאחד מהם, או שניהם, ∞).

נסכם את הסעיפים הראשונים בציר - הגרעין חי בתוך V , והתמונה חיה בתוך W :



כל הישר $\ker(T)$ נשלח אל 0, ולכן T אינה חד חד ערכית
אף וקטור אינו נשלח אל w , ולכן T אינה על

1.3 משפט המימדים השני

משפט המימדים השני

משפט 7. נניח כי $T : V \rightarrow W$ היא העתקה לינארית, כאשר V הוא מרחב וקטורי ממימד סופי. אז התמונה והגרעין של T הם מרחבים וקטורים ממימד סופי, ובנוסף

$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{Im}(T))$$

דוגמאות:

1. ניקח את הדוגמה של $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ שמוגדרת על ידי

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ax^3 - 2bx^2 + (a+b)x - 4(a+d)$$

כבר מצאנו את הגרעין ואת התמונה. בדקו כי

$$\dim(\ker(T)) = 1, \dim(\operatorname{Im}(T)) = 3$$

ואכן, $\dim(V) = 4$.

2. ניקח את הדוגמה של $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ המוגדרת על ידי

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ c-a \\ 2c-a \\ b+c \end{pmatrix}$$

הפעם

$$\dim(\ker(T)) = 0, \dim(\operatorname{Im}(T)) = 3$$

ואכן, $\dim(V) = 3$.

3. במקרה של גזירה $D : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_{n-1}[x]$, נקבל

$$\dim(\ker(D)) = 1, \dim(\operatorname{Im}(D)) = n$$

ואכן, $\dim(V) = n + 1$.

המרחב המאפס של מטריצה

דוגמה: נגדיר $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ על ידי

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -8 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

אז הגרעין הוא

$$\ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -8 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

כלומר, מדובר במרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$.

הגדרה 8. תהי $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ כאשר $\mathbb{F}$ שדה. **המרחב המאפס** של A מוגדר על ידי

$$\operatorname{null}(A) = \{x \in \mathbb{F}^n : Ax = 0\}$$

כלומר, מדובר במרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית.

מצד שני, מדובר בגרעין של ההעתקה הלינארית $T(x) = Ax$.

הגדרת הדרגה של העתקה לינארית

נזכיר שראינו שאם $A_{m \times n}$ מטריצה, אז לכל $x \in \mathbb{F}^n$ מתקיים כי

$$Ax = x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n$$

כאשר $C_1, \dots, C_n$ הן העמודות של A . נקבל אם כך מיד את המשפט הבא.

משפט 9. תהי $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ ונגדיר $T : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ על ידי $T(x) = Ax$. אז $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Col}(A)$.

הגדרה 10. תהי $T : V \rightarrow W$ העתקה לינארית. **הדרגה** של T מוגדרת על ידי $\operatorname{rank}(T) = \dim(\operatorname{Im}(T))$.

לכן, בתנאי המשפט, $\operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}(A)$. נקבל מכך גם את המשפט הבא, שידענו לפחות ברמה האינטואיטיבית כבר לפני כן.

משפט 11. תהי $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$. אז המימד של מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$ הוא

$$\dim(\text{null}(A)) = n - \text{rank}(A).$$

1.4 מוצגות היטב של העתקה לינארית על איברי בסיס

העתקה לינארית המוגדרת על איברי בסיס היא מוצגת היטב

דוגמאות:

1. נתון $V = W = \mathbb{R}_2[x]$. אנו מחפשים העתקה לינארית $T : V \rightarrow W$ המקיימת

$$\begin{cases} T(1) = 0 \\ T(x) = 1 \\ T(x^2) = 2x \end{cases}.$$

נעיר שאנו מכירים כזו: גזירה. אבל, אנו רוצים להבין איך מוצאים את כולן. במקרה הזה, זה לא מסובך: משתמע בהכרח כי

$$T(a + bx + cx^2) = aT(1) + bT(x) + cT(x^2) = b + 2cx$$

לכן T היא בהכרח העתקת הגזירה. בפרט, קיימת כזו T , והיא יחידה.

2. כמו בדוגמה 1, אבל עם

$$\begin{cases} T(x+1) = 0 \\ T(x-1) = 1 \\ T(x^2+2x) = 2x \end{cases}.$$

כאן

$$\begin{aligned} & T(a + bx + cx^2) \\ &= T\left(a \cdot \frac{(x+1) - (x-1)}{2} + b \cdot \frac{(x+1) + (x-1)}{2} + c \cdot ((x^2+2x) - (x+1) - (x-1))\right) \\ &= T\left(\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - c\right)(x+1) + \left(-\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - c\right)(x-1) + c(x^2+2x)\right) \\ &= \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - c\right)T(x+1) + \left(-\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - c\right)T(x-1) + cT(x^2+2x) \\ &= -\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - c + 2cx \end{aligned}$$

הסיבה שזה עבד בדוגמאות (גם קיום, וגם יחידות) היא שלקחנו באגפי שמאל בסיס של V .

אגפי ימין, מצד שני - לא משנים לשאלת הקיום והיחידות של T .

משפט 12. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי W מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.

נניח כי $(v_1, \dots, v_n)$ בסיס של V וכי $w_1, \dots, w_n \in W$.

1. קיימת העתקה לינארית יחידה אשר מקיימת $T(v_j) = w_j$, $j = 1, \dots, n$ והיא נתונה על ידי

$$T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n \quad (1)$$

2. ההעתקה T מסעיף 1 היא חד חד ערכית אם ורק אם $(w_1, \dots, w_n)$ בלתי תלויה לינארית ב- W .

3. ההעתקה T מסעיף 1 היא על אם ורק אם $(w_1, \dots, w_n)$ פורשת את W .

4. ההעתקה T מסעיף 1 היא חד חד ערכית ועל אם ורק אם $(w_1, \dots, w_n)$ בסיס של W .

נעיר שהביטוי אשר מגדיר את T בסעיף 1 הוא מוגדר היטב, כי מדובר בבסיס ולכן היצוג הוא יחיד.

1.5 איזומורפיזם

הגדרה של איזומורפיזם

הגדרה 13. נניח כי V, W מרחבים וקטורים מעל שדה $\mathbb{F}$.

1. העתקה לינארית $T : V \rightarrow W$ שהיא חד חד ערכית ועל מכונה **איזומורפיזם**.

2. נאמר כי W **איזומורפי** ל- V אם קיים איזומורפיזם $T : V \rightarrow W$.

דוגמאות:

1. נגדיר $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ על ידי

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

למשל,

$$T(x - 2x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

לא קשה לראות שזו העתקה חד חד ערכית וגם על. לכן זהו איזומורפיזם.

2. נגדיר $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ על ידי

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + c)x^3 + \frac{c + b}{2}x^2 + (d + a)x + b$$

האם זהו איזומורפיזם? נבדוק חד חד ערכיות, בעזרת הגרעין: אם $T(A) = 0$ אז

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ \frac{c+b}{2} = 0 \\ d + a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \iff a = b = c = d = 0$$

לכן היא חד חד ערכית.

כדי לבדוק אם T על, נניח כי $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \in \mathbb{R}_3[x]$, ונבדוק אם הוא שייך לתמונה. כלומר, נחפש מטריצה עבורה

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + c)x^3 + \frac{c + b}{2}x^2 + (d + a)x + b$$

זה קורה אם ורק אם

$$\begin{cases} a + c = \alpha \\ \frac{c+b}{2} = \beta \\ d + a = \gamma \\ b = \delta \end{cases} \iff \begin{cases} a = \alpha - 2\beta + \delta \\ b = \delta \\ c = 2\beta - \delta \\ d = \gamma - \alpha + 2\beta - \delta \end{cases}$$

מצאנו פתרון, ולכן T היא על.

נעיר שהיות הפתרון יחיד, מוכיח שוב כי T חד חד ערכית.

לכן T איזומורפיזם, כלומר, הפיכה. למעשה, מצאנו גם את ההופכית:

$$T^{-1}(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) = \begin{pmatrix} \alpha - 2\beta + \delta & \delta \\ 2\beta - \delta & \gamma - \alpha + 2\beta - \delta \end{pmatrix}$$

מעניין לשים לב שזו העתקה לינארית.

תכונות של איזומורפיזם

משפט 14. תהי $T : V \rightarrow W$ העתקה לינארית.

1. אם T איזומורפיזם (כלומר, הפיכה) אז $T^{-1} : W \rightarrow V$ היא גם העתקה לינארית. בפרט, W איזומורפי ל- V אם ורק אם V איזומורפי ל- W (נסמן: $V \cong W$).
2. אם V, W מרחבים וקטורים ממימד סופי וזהה ($\dim(V) = \dim(W)$) אז T חד חד ערכית אם ורק אם T על (כלומר, אם ורק אם T היא איזומורפיזם).
3. אם V, W מרחבים וקטורים ממימד סופי ו- T היא חד חד ערכית, אז $\dim(V) \leq \dim(W)$. באופן שקול: אם V, W מרחבים וקטורים ממימד סופי ובנוסף $\dim(V) > \dim(W)$ אז T אינה חד חד ערכית.
4. אם V, W מרחבים וקטורים ממימד סופי ו- T היא על, אז $\dim(V) \geq \dim(W)$. באופן שקול: אם V, W מרחבים וקטורים ממימד סופי ובנוסף $\dim(V) < \dim(W)$ אז T אינה על.

5. אם V, W מרחבים וקטורים ממימד סופי, אז $V \cong W$ אם ורק אם $\dim(V) = \dim(W)$.

דוגמה: לפי המשפט, נקבל כי

$$\mathbb{C}_5[x] \cong M_{2,3}(\mathbb{C}), \quad \mathbb{Q}^4 \cong M_2(\mathbb{Q}), \quad M_4(\mathbb{Z}_7) \cong M_{2,8}(\mathbb{Z}_7)$$

1.6 פעולות על העתקות לינאריות

כפל של העתקה לינארית בסקלר

דוגמה: נגדיר $T : \mathbb{C}_2[x] \rightarrow \mathbb{C}_2[x]$ על ידי

$$T(a + bx + cx^2) = c + ax + bx^2$$

זו העתקה לינארית, וגם

$$(2T)(a + bx + cx^2) = 2 \cdot T(a + bx + cx^2) = 2c + 2ax + 2bx^2$$

היא העתקה לינארית.

הגדרה 15. תהי $T : V \rightarrow W$ העתקה לינארית, ויהי α סקלר. ההעתקה $\alpha \cdot T : V \rightarrow W$ מוגדרת על ידי

$$(\alpha \cdot T)(v) = \alpha \cdot T(v)$$

משפט 16. תהי $T : V \rightarrow W$ העתקה לינארית, ויהי α סקלר. אז ההעתקה $\alpha \cdot T$ גם היא העתקה לינארית.

סכום של העתקות לינאריות

דוגמה: בהמשך לדוגמה הקודמת, נגדיר העתקה (לינארית - בדקו) נוספת על ידי

$$S(a + bx + cx^2) = b + 2cx$$

אז גם

$$(T + S)(a + bx + cx^2) = T(a + bx + cx^2) + S(a + bx + cx^2) = b + c + (2c + a)x + bx^2$$

היא העתקה לינארית.

הגדרה 17. נניח כי $S, T : V \rightarrow W$ הן שתי העתקות לינאריות. ההעתקה $S + T : V \rightarrow W$ מוגדרת על ידי

$$(S + T)(v) = S(v) + T(v).$$

משפט 18. נניח כי $S, T : V \rightarrow W$ הן שתי העתקות לינאריות. אז ההעתקה $S + T$ גם היא העתקה לינארית.

הרכבה של העתקות לינאריות

דוגמה: בהמשך לדוגמה הקודמת, אפשר לבצע הרכבה ולקבל (למשל)

$$ST(a + bx + cx^2) = S(c + ax + bx^2) = a + 2bx$$

הגדרה 19. נניח כי $T : V \rightarrow W$, $S : U \rightarrow V$ הן העתקות לינאריות. **ההרכבה** (מכונה גם: כפל) $TS : U \rightarrow W$ של ההעתקות מוגדרת על ידי

$$TS(u) = T(S(u))$$

משפט 20. נניח כי $T : V \rightarrow W$, $S : U \rightarrow V$ הן העתקות לינאריות. אז ההעתקה TS גם היא העתקה לינארית.

העתקת הזהות

הגדרה 21. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. **העתקת הזהות** היא ההעתקה $\text{Id}_V : V \rightarrow V$ אשר מוגדרת על ידי

$$\text{Id}_V(v) = v$$

להעתקה זו יש מספר תכונות שימושיות, כולן כמעט מיידידות מהגדרתה.

משפט 22. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$.

1. העתקת הזהות היא העתקה לינארית (ולמעשה, היא איזומורפיזם).

2. אם $T : V \rightarrow W$ היא העתקה לינארית, אז T איזומורפיזם אם ורק אם קיימת $S : W \rightarrow V$ עבורה

$$\begin{cases} ST = \text{Id}_V \\ TS = \text{Id}_W \end{cases}$$

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני שבוע הבא:
1. וקטור הקואורדינטות של וקטור ביחס לבסיס (שבוע 6).
2. כפל מטריצות ומטריצה הפיכה (שבועות 3 ו-4).

“ *To light a candle is to cast a shadow.*

”

Ursula K. Le Guin, A Wizard of Earthsea