

הרצאה 13: שימושים במשפט השארית

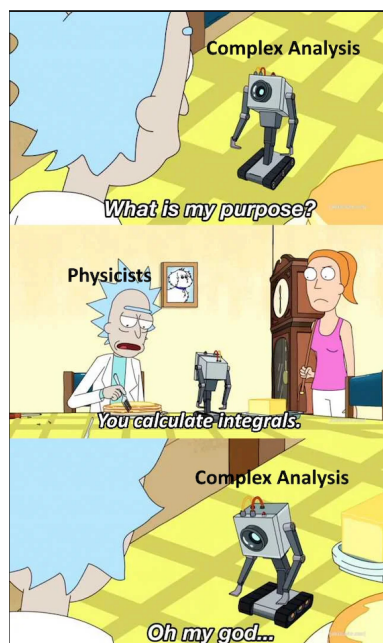
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

- 1 נקודות סינגולריות, טור לורן ומשפט השארית (המשך) 2
- 1.1 שימושים של משפט השארית 2



1 | נקודות סינגולריות, טור לורן ומשפט השארית (המשך)

1.1 שימושים של משפט השארית

אינטגרל טריגונומטרי

דוגמה: נחשב את $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{5} + \cos t}$.

פתרון. נחפש מהיכן האינטגרל הזה יכול להגיע תחת אינטגרציה מרוכבת על מעגל היחידה עם פרמטריזציה $z = e^{it}$; מתקיים $\cos t = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$ ו- $dt = -\frac{i}{z} dz$ ולכן

$$I = -i \int_{|z|=1} \frac{dz}{z \left(\sqrt{5} + \frac{z}{2} + \frac{1}{2z} \right)} = -2i \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2\sqrt{5}z + 1}$$

נשים לב ששורשי המכנה הם $-\sqrt{5} \pm 2$. $-\sqrt{5} - 2 < -2$ ולכן נמצא מחוץ למעגל היחידה ו- $-1 < -\sqrt{5} + 2 < 0$ ולכן נמצא בתוך מעגל היחידה. נחשב את השארית בקוטב פשוט זה:

$$\text{Res} \left(\frac{1}{[z - (-\sqrt{5} + 2)][z - (-\sqrt{5} - 2)]}, -\sqrt{5} + 2 \right) = \frac{1}{4}$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{5} + \cos t} = \pi \quad \text{לכן}$$

באופן כללי, בהינתן אינטגרל טריגונומטרי

$$I = \int_0^{2\pi} G(\cos t, \sin t) dt$$

נשתמש בקשר $z = e^{it}$, כלומר

$$\sin t = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \quad \cos t = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \quad dt = \frac{dz}{iz}$$

ונפיק אינטגרל מרוכב

$$I = \oint_{|z|=1} G \left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} \right) \frac{dz}{iz}$$

מכאן ננסות להפעיל את משפט השארית.

הערות:

- אין כל הגיון לזכור את התוצאה בעל פה, אלא רק את הרעיון של קישור לאינטגרל על מעגל היחידה על ידי $z = e^{it}$.

- זה לא משנה שתחום האינטגרציה המקורי הוא $[0, 2\pi]$. כל קטע באורך 2π יעבוד באותו אופן.
- אם נתון אינטגרל על קטע קטן יותר כמו $[0, \pi]$, עדיין אפשר לנסות להשתמש ראשית בזוגיות או בהצבה ממשית כדי להביא את האינטגרל להיות על קטע באורך 2π .

אינטגרל של פונקציה רציונלית על כל הישר הממשי

משפט 1. נניח כי $p(x), q(x)$ פולינומים בעלי מקדמים ממשיים אשר מקיימים את התנאים הבאים.

1. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $q(x) \neq 0$ (לפולינום $q(x)$ אין שורשים ממשיים).
 2. מעלות הפולינומים מקיימות $\deg(q(x)) \geq \deg(p(x)) + 2$.
- נסמן על ידי $z_1, \dots, z_n$ את השורשים של $q(x)$ אשר מקיימים את התנאי $\text{Im}(z) > 0$. אז

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} \left(\frac{p}{q}, z_k \right)$$

דוגמה: נחשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 2x^2 + 1}$.

הפולינום $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$ אינו מתאפס על הציר הממשי ומעלת המכנה גדולה ב-4 ממעלת המונה.

השורשים של $(z^2 + 1)^2$ הם $\pm i$.

מהם רק i נמצא בחצי המישור העליון ולכן לפי משפט,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 2x^2 + 1} = 2\pi i \text{Res}(f(z), i)$$

כאשר $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$.

הנקודה $z = i$ היא אפס מריבוי $m = 2$ של המכנה (למשל כי

$$\lim_{z \rightarrow i} (z - i)^2 \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z + i)^2} = -\frac{1}{4}$$

קיים ושונה מאפס) ולכן לפי ההגדרה, היא קוטב מסדר $m = 2$ של $f(z)$. לכן לפי משפט,

$$\text{Res}(f(z), i) = \lim_{z \rightarrow i} ((z - i)^2 f(z))' = \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{1}{(z + i)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow i} -\frac{2}{(z + i)^3} = -\frac{i}{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 2x^2 + 1} = 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

הערות:

- התוצאה של המשפט אולי קצת מוזרה, כי באגף שמאל כתוב מספר ממשי ובאגף ימין רואים בבירור i . זו דרך טובה לוודא שאין טעות: אגף ימין חייב להיות ממשי, לאחר סיום החישוב.

- במובן מסוים, הוכחת המשפט חשובה יותר מהמשפט עצמו. היא נותנת לנו שיטה כללית כדי לחשב אינטגרלים בעזרת משפט השארית, גם כאשר על פניו המשפט אינו מתאים: מקשרים את האינטגרל I לאינטגרלים I_R (כאשר R פרמטר) שכן מתאימים לחישוב בעזרת משפט השארית, ומוכיחים כי $I = \lim_{R \rightarrow \infty} I_R$.

הוכחה של המשפט לחישוב אינטגרל של פונקציה רציונלית

מהנתונים ומבחן ההשוואה הגבולי לאינטגרלים מוכללים נובע כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx$ מתכנס בהחלט. לכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

נגדיר מסלול C_R על ידי $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$ (חצי עליון של מעגל סביב הראשית ברדיוס R). ראשית, אם R גדול יותר מהמודול המקסימלי מבין $|z_1|, \dots, |z_n|$ אז לפי משפט השארית

$$\int_{-R}^R \frac{p(x)}{q(x)} dx + \int_{C_R} \frac{p(z)}{q(z)} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} \left(\frac{p}{q}, z_k \right)$$

אגף ימין אינו תלוי ב- R (בתנאי שהוא מספיק גדול כנ"ל). נוכיח כי

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{p(z)}{q(z)} dz = 0$$

ובכך נסיים.

נסמן $m = \deg(p(x))$, $k = \deg(q(x))$. לפי ההנחה, $k \geq m + 2$.

נסמן בנוסף את המקדם המוביל של $p(x)$ על ידי a_m , ושל $q(x)$ על ידי b_k . אז

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{p(z)}{z^m} \right| = |a_m| > 0, \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{q(z)}{z^k} \right| = |b_k| > 0,$$

לכן לפי תכונות סדר של גבולות, קיים $R_0 > 0$ כך שלכל $|z| > R_0$ מתקיים

$$\left| \frac{p(z)}{z^m} \right| < 2|a_m|, \quad \left| \frac{q(z)}{z^k} \right| > \frac{|b_k|}{2}$$

לכן

$$|p(z)| < 2|a_m| |z|^m, \quad |q(z)| > \frac{|b_k|}{2} |z|^k \Rightarrow \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| < \frac{2|a_m| |z|^m}{\frac{|b_k|}{2} |z|^k} = \frac{4|a_m|}{|b_k|} |z|^{m-k}$$

לכן לכל $R > R_0$, לפי משפט ההערכה

$$\left| \int_{C_R} \frac{p(z)}{q(z)} dz \right| \leq \frac{4|a_m|}{|b_k|} R^{m-k} \cdot \pi R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

כי $m - k + 1 \leq -1$.

הלמה של ג'ורדן

משפט 2: נניח כי $p(x), q(x)$ פולינומים בעלי מקדמים ממשיים אשר מקיימים את התנאים הבאים.

1. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $q(x) \neq 0$ (לפולינום $q(x)$ אין שורשים ממשיים).

2. מעלות הפולינומים מקיימות $\deg(q(x)) \geq \deg(p(x)) + 1$.

נסמן על ידי $z_1, \dots, z_n$ את השורשים של $q(x)$ אשר מקיימים את התנאי $\operatorname{Im}(z) > 0$. אז לכל $\alpha > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{i\alpha z}, z_k \right)$$

דוגמה: חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x) dx}{(x^2+4)^2(x^2+9)}$.

נסמן את האינטגרל המבוקש על ידי I . נשים לב כי

$$I = \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+4)^2(x^2+9)} dx \right)$$

הפולינום במכנה הוא מדרגה 6 ובמונה מדרגה 0 ולכן לפי הלמה של ג'ורדן,

$$I = \operatorname{Re} \left(2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(z), z_k) \right)$$

כאשר $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2(z^2+9)}$ והנקודות $z_1, \dots, z_n$ הן הנקודות הסינגולריות של f בחצי המישור העליון: $2i, 3i$.

הנקודה $3i$ היא קוטב פשוט (אנליטית חלקי $z - 3i$) ולכן

$$\operatorname{Res}(f(z), 3i) = \lim_{z \rightarrow 3i} ((z - 3i) f(z)) = \lim_{z \rightarrow 3i} \left(\frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2(z+3i)} \right) = \frac{e^{-3}}{25 \cdot 6i}$$

הנקודה $2i$ היא קוטב מסדר $m=2$ (אנליטית חלקי $(z-2i)^2$) ולכן

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f(z), 2i) &= \lim_{z \rightarrow 2i} ((z - 2i)^2 f(z))' = \lim_{z \rightarrow 2i} \left(\frac{e^{iz}}{(z+2i)^2(z^2+9)} \right)' \\ &= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{ie^{iz}(z+2i)^2(z^2+9) - e^{iz}(2(z+2i)(z^2+9) + 2z(z+2i)^2)}{(z+2i)^4(z^2+9)^2} \\ &= e^{-2} \cdot \frac{i \cdot (-16) \cdot 5 - 2 \cdot 4i \cdot 5 - 4i \cdot (-16)}{2^8 \cdot 5} = e^{-2} \cdot \frac{-14i}{2^6 \cdot 5} \end{aligned}$$

לכן בסך הכל

$$I = \operatorname{Re} \left(2\pi i \left(\frac{e^{-3}}{25 \cdot 6i} + \frac{14e^{-2}}{2^6 \cdot 5i} \right) \right) = \pi \left(\frac{e^{-3}}{75} + \frac{7e^{-2}}{80} \right)$$

אינטגרל ממשי לאורך חתך ענף

נניח שאנו רוצים לחשב את האינטגרל

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 1} dx$$

גם אילו היה מדובר באינטגרל לאורך כל הישר (של פונקציה דומה), אי אפשר היה להשתמש באופן ישיר בשיטות שראינו עד כה היות שהפונקציה

$$f(z) = \frac{z^{\frac{1}{3}}}{z^2 + 1}$$

היא פונקציה רב ערכית אשר $z = 0$ היא נקודת הסתעפות שלה.

כלומר, אין ענף שלה שאנליטי בנקודה $z = 0$, אשר נמצאת על מסלול האינטגרציה.

כדי להתגבר על בעיה זו, נקבע $0 < r < R$ ונגדיר מסלול סגור באופן הבא.

ראשית נסמן

$$\gamma_1(t) = t + ir, \quad 0 \leq t \leq \sqrt{R^2 - r^2}$$

זהו קו ישר בגובה r שהוא כמעט בדיוק (כאשר r קטן) מעל הקטע $[0, R]$.

שנית, נלך מנקודת הסיום $\sqrt{R^2 - r^2} + ir$ של Γ_1 לאורך המעגל $|z| = R$ נגד כיוון השעון עד לנקודה הצמודה לה:

$$\gamma_2(t) = Re^{it}, \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

כאשר (אבל הערכים הללו לא יהיה מאוד חשובים)

$$\alpha = \text{Arg} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} + i \cdot \frac{r}{R} \right), \quad \beta = \text{Arg} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} - i \cdot \frac{r}{R} \right) + 2\pi$$

כעת נחזור מנקודה זו אל הציר המדומה על ישר אופקי שוב, כלומר

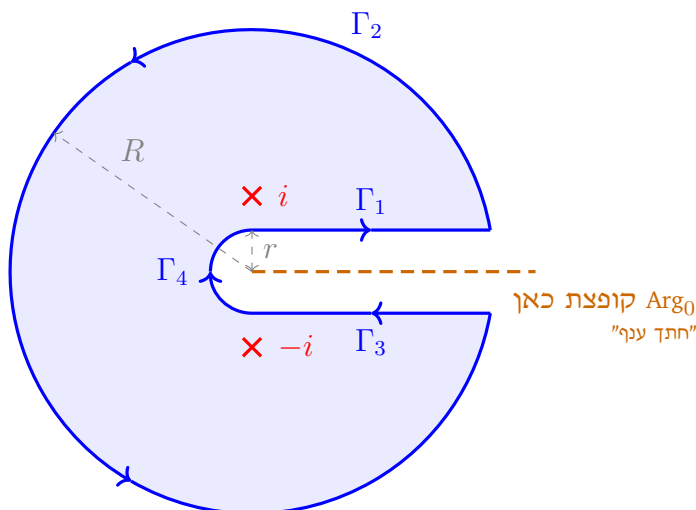
$$\gamma_3(t) = t - ir, \quad 0 \leq t \leq \sqrt{R^2 - r^2}$$

(זו למעשה פרמטריזציה של $-\Gamma_3$).

לבסוף, נחבר את שתי הנקודות על הציר המדומה בלי לגעת בציר הממשי האי שלילי, כדי שלפונקציה $f(z)$ יהיה ענף אנליטי על Γ ובתוכו. נעשה זאת באמצעות חצי מעגל ברדיוס r , כלומר

$$\gamma_4(t) = re^{it}, \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$$

(זו למעשה פרמטריזציה של $-\Gamma_4$).



נגדיר אם כן

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

עם כיוון חיובי ביחס לפנים שלו, ונבחר את הענף הבא של $f(z)$ אשר אנליטי על Γ ובתוכו:

$$F(z) = \frac{e^{\frac{1}{3}(\ln|z| + i \operatorname{Arg}_0(z))}}{z^2 + 1}$$

כעת נבדוק מה תוצאת האינטגרל של $F(z)$ לאורך כל אחד מהמסלולים $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, כאשר $r \rightarrow 0^+, R \rightarrow \infty$.

ראשית, אם $R > 1$ אז לכל $|z| = R$ מתקיים כי

$$|F(z)| = \frac{|z|^{\frac{1}{3}}}{|z^2 + 1|} = \frac{\sqrt[3]{R}}{|z^2 + 1|} \leq \frac{\sqrt[3]{R}}{|z|^2 - 1} = \frac{\sqrt[3]{R}}{R^2 - 1}$$

לכן לכל $0 < r < R$ נקבל כי

$$\left| \int_{\Gamma_2} F(z) dz \right| \leq \frac{\sqrt[3]{R}}{R^2 - 1} \cdot \ell(\Gamma_2) \leq \frac{\sqrt[3]{R}}{R^2 - 1} \cdot 2\pi R = \frac{2\pi R^{\frac{4}{3}}}{R^2 - 1}$$

שנית, אם $r < 1$ אז לכל $|z| = r$ מתקיים כי

$$|F(z)| = \frac{|z|^{\frac{1}{3}}}{|z^2 + 1|} = \frac{\sqrt[3]{r}}{|z^2 + 1|} \leq \frac{\sqrt[3]{r}}{1 - |z|^2} = \frac{\sqrt[3]{r}}{1 - r^2}$$

לכן נקבל כי

$$\left| \int_{\Gamma_4} F(z) dz \right| \leq \frac{\sqrt[3]{r}}{1 - r^2} \cdot \ell(\Gamma_4) = \frac{\sqrt[3]{r}}{1 - r^2} \cdot \pi r = \frac{r^{\frac{4}{3}}}{1 - r^2}$$

כעת נעבור אל Γ_1 . הנקודות $\gamma_1(t) = \gamma_1^{R,r}(t)$ נמצאות ברביע הראשון וכן $\lim_{r \rightarrow 0^+} \gamma_1^{R,r}(t) = t$ ולכן (הסבירו!)

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} F(\gamma_1^{R,r}(t)) = \frac{\sqrt[3]{t}}{t^2 + 1}$$

לכן לפי רציפות של אינטגרל פרמטרי מחדו"א 2,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma_1} F(z) dz = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} F\left(\gamma_1^{R,r}(t)\right) dt = \int_0^R \frac{\sqrt[3]{t}}{t^2+1} dt$$

באופן דומה, עבור Γ_3 , הנקודות $\gamma_3(t) = \gamma_3^{R,r}(t)$ נמצאות ברביע הרביעי בו $\text{Arg}_0(z)$ קרוב ל- 2π , ובנוסף $\lim_{r \rightarrow 0^+} \gamma_3^{R,r}(t) = t$ ולכן

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} F\left(\gamma_3^{R,r}(t)\right) = \frac{\sqrt[3]{t} \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}}{t^2+1}$$

לכן לפי רציפות של אינטגרל פרמטרי מחדו"א 2,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma_3} F(z) dz = - \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} F\left(\gamma_3^{R,r}(t)\right) dt = -e^{\frac{2\pi i}{3}} \int_0^R \frac{\sqrt[3]{t}}{t^2+1} dt$$

כעת, לפי משפט השארית, בהנחה שמתקיים $0 < r < 1 < R$,

$$\int_{\Gamma} F(z) dz = 2\pi i \cdot (\text{Res}(f(z), i) + \text{Res}(f(z), -i)) := J$$

נחשב את J בהמשך. בינתיים נשים לב כי לכן

$$\int_{\Gamma_1} F(z) dz + \int_{\Gamma_2} F(z) dz + \int_{\Gamma_3} F(z) dz + \int_{\Gamma_4} F(z) dz = J$$

ולכן

$$\int_{\Gamma_1} F(z) dz + \int_{\Gamma_3} F(z) dz - J = - \int_{\Gamma_2} F(z) dz - \int_{\Gamma_4} F(z) dz$$

לכן

$$\left| \int_{\Gamma_1} F(z) dz + \int_{\Gamma_3} F(z) dz - J \right| = \left| \int_{\Gamma_2} F(z) dz \right| + \left| \int_{\Gamma_4} F(z) dz \right| \leq \frac{2\pi R^{\frac{4}{3}}}{R^2-1} + \frac{r^{\frac{4}{3}}}{1-r^2}$$

לכן נוכל להשאיר $r \rightarrow 0^+$ ולקבל

$$\left| \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) \int_0^R \frac{\sqrt[3]{t}}{t^2+1} dt - J \right| \leq \frac{2\pi R^{\frac{4}{3}}}{R^2-1}$$

לכן נוכל כעת להשאיר $R \rightarrow \infty$ ולקבל

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{t}}{t^2+1} dt = \frac{J}{1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}}$$

נעיר שניתן לבדוק באופן ישיר באמצעות מבחני השוואה של אינטגרלים מוכללים שהאינטגרל I אכן מתכנס, אך החשבוניות הנ"ל מהווים הוכחה על פי ההגדרה שזה אכן כך.

בנוסף, נוכל כעת לחשב את ערכו של I . נשים לב כי $\pm i$ הם אפסים מסדר 1 של המכנה ולכן

$$\text{Res}(f(z), i) = \frac{e^{\frac{\pi i}{6}}}{2i} = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{\pi i}{3}}$$

$$\text{Res}(f(z), -i) = \frac{e^{\frac{3\pi i}{6}}}{-2i} = -\frac{1}{2}$$

לכן

$$J = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(e^{-\frac{\pi i}{3}} - 1\right)$$

לכן בסך הכל,

$$\begin{aligned} I &= \frac{J}{1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}} = \frac{\pi i \cdot \left(e^{-\frac{\pi i}{3}} - 1\right)}{1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}} = \frac{\pi i \cdot \left(e^{-\frac{\pi i}{3}} - 1\right) \left(1 - e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)}{\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) \left(1 - e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)} \\ &= \frac{\pi i \cdot \left(e^{-\frac{\pi i}{3}} - 1 - e^{-\pi i} + e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)}{1 - e^{\frac{2\pi i}{3}} - e^{-\frac{2\pi i}{3}} + 1} = \frac{\pi i \cdot \left(\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

“ The shortest path between two truths in the real domain passes through the complex domain. ”

Jacques Hadamard