

הרצאה 8: מסקנות מנוסחת ההצגה של קושי

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1	אינטגרציה מרוכבת (המשך)	2
1.1	נוסחת ההצגה של קושי (המשך)	2
1.2	מסקנות מנוסחת קושי	3



תזכורות

משפט 1: תהי f רציפה בתחום D . התנאים הבאים שקולים.

1. קיום פונקציה קדומה: קיימת F אנליטית ב- D כך ש- $F'(z) = f(z)$ לכל $z \in D$.
2. האינטגרל תלוי רק בנקודות הקצה: האינטגרל $\int_{\gamma} f(z) dz$ זהה לכל שני עקומים גזירים ברציפות למקוטעין שמוכלים ב- D בעלי אותה נקודות התחלה ואותה נקודת סיום.
3. האינטגרל על כל מסלול סגור מתאפס: לכל $\Gamma \subset D$ סגור, $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$.

משפט 2: נניח כי D הוא תחום חסום עם n חורים, כלומר ששפתו מורכבת משפה חיצונית Γ ו- n שפות פנימיות $\Gamma_j, j = 1, \dots, n$. תהי $f(z)$ אנליטית ב- $\bar{D}$. אז

$$0 = \int_{\partial D} f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz - \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} f(z) dz$$

1 | אינטגרציה מרוכבת (המשך)

1.1 נוסחת ההצגה של קושי (המשך)

ניסוח נוסחת קושי לנגזרות

כפי שאמרנו באופן לא רשמי בפעם שעברה:

משפט 3. תהי $f(z)$ אנליטית על עקום ג'ורדן גזיר ברציפות למקוטעין γ ובפנים שלו. אז לכל $z \in \text{int}(\Gamma)$ מתקיים כי f גזירה מכל סדר בנקודה z ובנוסף:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}} ds$$

דוגמה: איך אפשר לחשב את האינטגרל המבהיל $\int_{|z|=5} \frac{\sin z}{(z-3)^4} dz$ בזכות נוסחת קושי לנגזרות, זה קל. נסמן $f(z) = \sin z$. אז

$$\frac{3!}{2\pi i} \int_{|z|=5} \frac{f(s)}{(s-3)^4} dz = f^{(3)}(3) = -\cos(3)$$

כלומר, האינטגרל שווה ל- $-\frac{\pi i}{3} \cos(3)$.

מסקנה: אם f אנליטית בעיגול $|s - z| \leq R$ אז לכל $n = 0, 1, \dots$ מתקיים כי

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! \max_{|s-z|=R} \{|f|\}}{R^n}.$$

הוכחת נוסחת קושי לנגזרות

כדי להוכיח את המשפט, נוכיח בעצם תוצאה חזקה יותר שבשילוב עם נוסחת קושי נותנת את הנוסחה הנ"ל לנגזרות כמסקנה מיידית:

למה 4: תהי $\varphi(s)$ רציפה על עקום גזיר ברציפות למקוטעין γ . אז הפונקציה:

$$F_n(z) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(s)}{(s-z)^n} ds$$

אנליטית בכל נקודה $z \notin \Gamma$, ובנוסף $F'_n(z) = nF_{n+1}(z)$.

1.2 מסקנות מנוסחת קושי

כל פונקציה אנליטית גזירה מכל סדר

בסעיף הזה נכיר מספר תכונות מפתיעות ומעניינות של פונקציות אנליטיות, שמתקבלות בזכות אינטגרציה מרוכבת ובמיוחד בזכות נוסחת קושי.

משפט 5. אם $f(z)$ אנליטית בנקודה z_0 אז f גזירה מכל סדר בנקודה z_0 .
לכן במקרה זה, גם f' אנליטית בנקודה z_0 (ומכאן שהיא רציפה), וכן הלאה עבור $f'', \dots$.

אפיון לקיום של פונקציה קדומה

האם לכל פונקציה רציפה בתחום יש פונקציה קדומה? ראינו כבר שלא:

דוגמאות:

1. האם לפונקציה $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ יש פונקציה קדומה בתחום $D = \mathbb{C}$?
אילו הייתה כזו פונקציה קדומה $F(z)$, אז $F'(z) = f(z)$ לכל $z \in \mathbb{C}$ גורר כי $F(z)$ שלמה. לכן לפי משפט 5, גם $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ שלמה.
אבל אנו יודעים כבר שהפונקציה $\operatorname{Re}(z)$ אינה גזירה באף נקודה.
2. הפונקציה $f(z) = \frac{1}{z}$ רציפה בתחום הגדרתה, אך ראינו שאין לה פונקציה קדומה בתחום זה.

מצד שני, אנו כבר יודעים שבתחום פשוט קשר לכל פונקציה אנליטית יש פונקציה קדומה. לכן אפשר לדייק את השאלה: האם לכל פונקציה רציפה בתחום פשוט קשר יש פונקציה קדומה?

משפט 6: תהי $f(z)$ מוגדרת בתחום D . אז קיימת פונקציה קדומה עבור f ב- D אם ורק אם f אנליטית ב- D וכן האינטגרל המרוכב של f על כל מסלול ג'ורדן וגזיר ברציפות למקוטעין הוא 0.

בפרט, אם D פשוט קשר, אז ל- f יש פונקציה קדומה ב- D אם ורק אם f אנליטית ב- D .

אם D תחום רב קשרי, אז ל- f יש פונקציה קדומה ב- D אם ורק אם f אנליטית ב- D והאינטגרל המרוכב סביב כל חור של D הוא 0.

לכן כל פונקציה רציפה שאינה אנליטית בתחום, אין לה פונקציה קדומה.

דוגמה: לפונקציה $f(z) = \bar{z}$ אין פונקציה קדומה באף תחום היות שהיא אינה אנליטית באף תחום.

משפט מוררה

המשפט הבא הוא **משפט מוררה** (Giacinto Morera, 1856 – 1909).

משפט 7: תהי $f(z)$ רציפה בתחום D .

אם לכל עקום ג'ורדן וגזיר ברציפות למקוטעין בתחום D מתקיים כי $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$, אז f אנליטית ב- D .

הערה: למעשה מספיק שהאינטגרל על כל משולש יתאפס. לא נוכיח את הגרסה החזקה הזו של המשפט.

משפט ליוויל

המשפט הבא הוא **משפט ליוויל** (Joseph Liouville, 1809 – 1882).

משפט 8: כל פונקציה שלמה וחסומה היא קבועה.

כלומר, אם $f(z)$ אנליטית בכל $\mathbb{C}$ וקיים M כך ש- $|f(z)| \leq M$ לכל $z \in \mathbb{C}$, אז f קבועה ב- $\mathbb{C}$.

הוכחה: נוכיח כי $f'(z) \equiv 0$ בכל $\mathbb{C}$.

נקבע $z_0 \in \mathbb{C}$. לפי נוסחת קושי לנגזרות, לכל $R > 0$ מתקיים כי

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-z_0|=R} \frac{f(s)}{(s-z_0)^2} ds$$

לכן, לפי אי-שוויון המשולש האינטגרלי,

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|s-z_0|=R} \frac{|f(s)|}{|s-z_0|^2} |ds| = \frac{1}{2\pi} \int_{|s-z_0|=R} \frac{|f(s)|}{R^2} |ds| \leq \frac{1}{2\pi R^2} \cdot M \cdot 2\pi R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

הערך $|f'(z_0)| = 0$ קבוע ולכן $f'(z) \equiv 0$ בכל $\mathbb{C}$.

כלומר, $f'(z) \equiv 0$ לכן f קבועה.

□

שימושים במשפט ליוביל

משפט ליוביל הוא משפט חזק.

דוגמה: נתון כי $f(z)$ שלמה וכן כי קיים $M > 0$ עבורו

$$|f(z)| \leq Me^x, \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}$$

מה ניתן לומר על $f(z)$?

נגדיר פונקציה עזר $g(z) = f(z)e^{-z}$. אז $g(z)$ שלמה כמכפלה של שלמות.

בנוסף, לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים כי

$$|g(z)| = |f(z)| \cdot |e^{-z}| \leq Me^x \cdot e^{-x} = M$$

לכן g שלמה וחסומה ולכן לפי משפט ליוביל, היא קבועה.

כלומר, קיים $C \in \mathbb{C}$ עבורו $g(z) \equiv C$, ולכן

$$C = g(z) = f(z)e^{-z} \Rightarrow f(z) = Ce^z, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

בנוסף, להוכחה שלו יש עוצמה בפני עצמה: בעזרת השיטה שמתוארת בה, ניתן להוכיח גם דברים אחרים שאינם מסקנה ישירה של משפט ליוביל (אלא של נוסחת קושי). נדגים.

דוגמה: נתון כי $f(z)$ שלמה וכן כי קיים $M > 0$ עבורו

$$|f(z)| \leq M \left(|z|^{\frac{7}{2}} + 1 \right), \quad \forall z \in \mathbb{Z}$$

נוכיח כי f היא אם כך בהכרח פולינום ממעלה 3 לכל היותר.

מה מאפיין פולינום ממעלה 3 לכל היותר? התנאי הפשוט $f^{(4)}(z) \equiv 0$.

לכן ההוכחה תהיה חיקוי של הוכחת משפט ליוביל, עם $f^{(4)}(z)$ במקום $f'(z)$. יהי $z \in \mathbb{C}$.

היות שנתון כי f שלמה ולפי נוסחת קושי לנגזרות, לכל $R > 0$ מתקיים כי

$$\begin{aligned} |f^{(4)}(z)| &= \left| \frac{4!}{2\pi i} \oint_{|s-z|=R} \frac{f(s)}{(s-z)^5} ds \right| \leq \frac{12}{\pi} \oint_{|s-z|=R} \frac{|f(s)|}{R^5} |ds| \\ &\leq \frac{12}{\pi R^5} \oint_{|s-z|=R} M \left(|s|^{\frac{7}{2}} + 1 \right) |ds| \leq \frac{12}{\pi R^5} \oint_{|s-z|=R} M \left((R + |z|)^{\frac{7}{2}} + 1 \right) |ds| \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו באי שוויון המשולש: $|s| = |s - z + z| \leq |s - z| + |z|$. לכן

$$|f^{(4)}(z)| \leq \frac{12}{\pi R^5} \oint_{|s-z|=R} M \left((R + |z|)^{\frac{7}{2}} + 1 \right) |ds| = \frac{12}{\pi R^5} \cdot M \left((R + |z|)^{\frac{7}{2}} + 1 \right) \cdot 2\pi R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

לכן $f^{(4)}(z) = 0$.

זה נכון לכל $z \in \mathbb{C}$ ולכן $f^{(4)}(z) \equiv 0$ בכל $\mathbb{C}$.

לכן (הוכיחו!) f פולינום ממעלה קטנה או שווה ל-3.

המשפט היסודי של האלגברה

כפי ששמו מרמז, המשפט הבא שייך בכלל לקורס באלגברה. אבל הוכחתו דווקא שייכת לקורס בפונקציות מרוכבות, היות שהוא מסקנה די ישירה ממשפט ליוביל.

משפט 9: לכל פולינום $f(z)$ שמעלתו מקיימת $\deg(f(z)) \geq 1$ יש שורש מרוכב.

זה המשפט היסודי של האלגברה.

הוכחה: נניח בשלילה שקיים פולינום $f(z)$ ממעלה גדולה או שווה ל-1 ללא שורשים מרוכבים.

כלומר, לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $f(z) \neq 0$.

ראשית, f שלמה ולא מתאפסת ולכן $g(z) := \frac{1}{f(z)}$ שלמה.

שנית, נסמן $f(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ כאשר $n \geq 1$ ו- $a_n \neq 0$. אז

$$g(z) = \frac{1}{a_n z^n + \dots + a_0} = \frac{1}{z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right)} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{\infty \cdot (a_n + 0 \dots + 0)} = 0$$

לכן קיים $R > 0$ כך שלכל $|z| > R$ מתקיים $|g(z)| < \frac{1}{2}$.

בנוסף, לפי משפט וירשטראס, g חסומה בעיגול $|z| \leq R$. כלומר, קיים $M > 0$ כך שלכל $|z| \leq R$ מתקיים $|g(z)| \leq M$.

לכן לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $|g(z)| \leq \max\left\{\frac{1}{2}, M\right\}$.

לכן g שלמה וחסומה, ולכן לפי משפט ליוביל היא קבועה.

לכן f קבועה, וזו סתירה לכך שהמעלה של f גדולה או שווה ל-1.

□

עיקרון הממוצע

המשפט הבא הוא מסקנה מיידית מנוסחת קושי. היתרון בו הוא פשוטות או במילים אחרות, נגישות.

משפט 10. אם f אנליטית בעיגול $|z - z_0| \leq R$ אז

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) dt$$

הוא מכונה **עיקרון הממוצע**: הערך במרכז שווה לממוצע הערכים של השפה. ניתן לכתוב את עיקרון הממוצע גם בכתיב אחר:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{|z-z_0|=R} f(z) |dz|$$

זה מידי ממה שהוכחנו, בעזרת הגדרת האינטגרל לפי אורך קשת.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. קבוצה קומפקטית, ומשפט ויירשטראס על כך שפונקציה רציפה מקבלת מקסימום על קבוצה קומפקטית.
2. טורים של מספרים ממשיים ומבחני ההתכנסות הבסיסיים, והתכנסות במידה שווה של סדרות וטורים של פונקציות ממשיים.

“ *A ship in harbor is safe, but that is not what ships are built for.*

”

John A. Shedd, Salt from My Attic