

הרצאה 25: משפט סטוקס

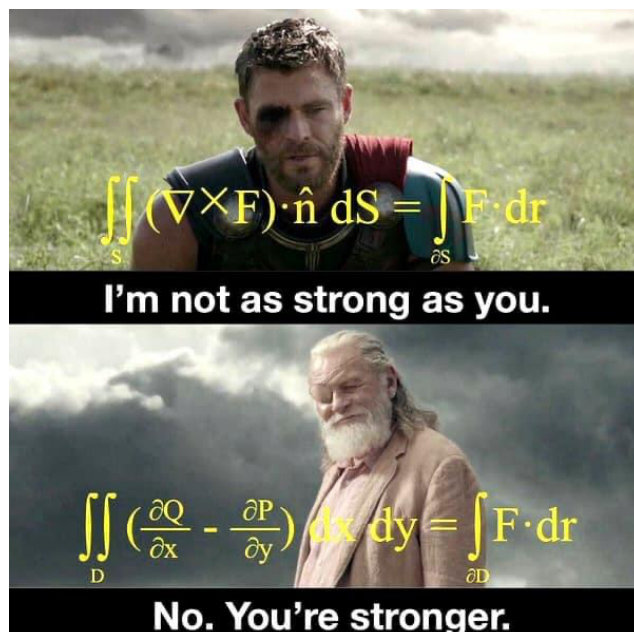
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1 אינטגרל משטחי (המשך)
2	1.1 משפט סטוקס



1 | אינטגרל משטחי (המשך)

1.1 משפט סטוקס

צירקולציה של שדה וקטורי

המושג של רוטור מגיע מממד אחר מאשר הדיברגנץ, אבל יש קווי דמיון. אם הדיברגנץ מדד קצב נקודתי של יצירת שטף, הרוטור יהיה מדד לצירקולציה הנקודתית של השדה.

אם נניח מקל קטן בנקודה (x, y, z) , האם הוא יתחיל להסתובב בהשפעת הכוח $\vec{F}$ - ואם כן, מהו ציר הסיבוב שלו?

חשוב לזכור שהכוח קבוע ואינו משתנה עם הזמן ולכן אין אפקטים אוסצילטוריים.

ליתר דיוק, אנו רוצים להבין כמה סיבובים המקל יצבור לאורך זמן. כדי לפענח את זה, ניקח משטח קטן סביב נקודה ונחשב את סך הכל הכוח שפועל באופן משיק לשפת המשטח. כלומר, נחשב עבודה של הכוח לאורך שפת המשטח.

• אם $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} > 0$, אז הצירקולציה חיובית.

• אם $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} < 0$, אז הצירקולציה שלילית.

• אם $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$, אז הצירקולציה אפס.

בנוסף, חשוב לשים לב שהתשובה יכולה להיות תלויה בציר הסיבוב. כלומר, אם מסובבים את המשטח עצמו במרחב, אפשר לקבל תוצאות שונות. לכן צריך לבחון את השאלה בנפרד לכל ציר.

הגדרת הרוטור

ניקח אם כן ציר סיבוב $\hat{n}$ אשר צריך להיות ניצב למשטח שלוקחים. לבסוף, נקטין את שטח המשטח לאפס וננרמל באופן הבא:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \frac{\text{עבודה על שפה משטח המאונך לוקטור } \hat{n}}{\text{שטח המשטח}} \quad (\text{ההגדרה הפיסיקלית של הרוטור "בכיוון } \hat{n})$$

כאשר בגבול, השטח של המשטח שואף לאפס כאשר $\epsilon \rightarrow 0+$.

בשלב זה חשוב להבין כי $\text{rot } \vec{F}$ בנקודה (x, y, z) הוא וקטור. כלומר, הרוטור הוא שדה וקטורי. הגבול הנ"ל אינו $\text{rot } \vec{F} \cdot \hat{n}$ אלא $\text{rot } \vec{F} \cdot \hat{n}$. הכיוון של הרוטור הוא ה- $\hat{n}$ עבורו הגבול הנ"ל הוא הגדול ביותר, ואז ערכו שווה לגודל הרוטור.

למה עבודה על שפת המשטח עוזרת למדוד צירקולציה באופן שתואר? כי אם לאורך כל השפה, $\vec{F}$ מכיוון כמו המשיק, אז נקבל תוצאה חיובית וזה מתאים לצירקולציה חיובית. כנ"ל אם $\vec{F}$ מכיוון בניגוד למשיק, עם צירקולציה שלילית. לבסוף, אם $\vec{F}$ מאונך לשפת המשטח לכל אורכו, אז העבודה לאורך השפה תהיה 0 ולא נקבל כל צירקולציה.

כדי לחבר את האינטואיציה הנ"ל למשהו שפשוט לתיאור, נבין את רכיב ה- z של הוקטור $\vec{F}$. כלומר, נחשב באופן לא רשמי את $\vec{F} \cdot \hat{k}$. לפי ההגדרה הפיסיקלית הנ"ל. ניקח מלבן קטן

$$S = [x, x + \Delta x] \times [y, y + \Delta y] \times \{z\}$$

זהו משטח אשר מאונך לכיוון $\hat{k}$, ושטחו $\Delta x \Delta y$ שואף לאפס כאשר $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$. נתבונן בכל אחת מארבע הצלעות בנפרד וניקח כיוון חיובי על המלבן. בכל צלע נשתמש בוקטור המשיק המתאים $\pm \hat{i}, \pm \hat{j}$. נציין כי

$$\vec{F} \cdot (\pm \hat{i}) = \pm P, \quad \vec{F} \cdot (\pm \hat{j}) = \pm Q$$

לכן, בקירוב,

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} \approx P(x, y, z) \Delta x + Q(x + \Delta x, y, z) \Delta y - P(x, y + \Delta y, z) \Delta x - Q(x, y, z) \Delta y$$

לכן

$$\frac{\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}}{\Delta x \Delta y} \approx \frac{P(x, y, z) - P(x, y + \Delta y, z)}{\Delta y} + \frac{Q(x + \Delta x, y, z) - Q(x, y, z)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} -P'_y + Q'_x$$

חשבון דומה עבור רכיבי x, y מוביל להגדרה הרשמית הבאה.

הגדרה 1. יהי

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \hat{i} + Q(x, y, z) \hat{j} + R(x, y, z) \hat{k}$$

שדה וקטורי גזיר בנקודה (x, y, z) . הרוטור של השדה מוגדר על ידי

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{k}$$

ההגדרה קשה לתפעול, אבל הנה דרך יעילה לשחזר אותה:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

דוגמאות של רוטור

דוגמאות:

1. ניקח למשל

$$\vec{F}(x, y, z) = x^2 \hat{i} + e^{xy} \hat{j} + 2z \hat{k}$$

נחשב

$$\text{rot } \vec{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & e^{xy} & 2z \end{vmatrix} = (0, 0, ye^{xy})$$

פגשנו כבר בעבר את האופרטור הדיפרנציאלי דל, או נבלה:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

ראינו שאפשר לכתוב באמצעותו את הגרדיאנט והדיברגנץ. נוסיף כעת גם את הרוטור:

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

שפה של משטח

כדי לנסח את המשפט נצטרך ראשית להסכים על מינוח רשמי לגבי משטחים והשפה שלהם. נניח שנתון משטח $S \subset \mathbb{R}^3$. יש לנו כבר הגדרה של השפה ∂S , אבל היא לא מתאימה למה שרובנו חושבים עליו בתור השפה של S : מדובר בקבוצת כל הנקודות $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ שבכל סביבה שלהם יש נקודות מתוך S וגם נקודות מחוץ ל- S .

דוגמה: ניקח את חצי הכיפה העליונה של ספירה,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

הנקודות שמקיימות את התנאי הנ"ל של $(x, y, z) \in \partial S$ הן בדיוק הנקודות של S . זו לא המשמעות של שפה של משטח שאנחנו מכוונים אליה כרגע: זו שפה טופולוגית, לא שפה "משטחית". השפה המשטחית של S היא

$$\partial S = \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$

באופן לא רשמי, **השפה** ("המשטחית", לא הטופולוגית) של S מוגדרת להיות קבוצת כל הנקודות על S שכל סביבה מספיק קטנה שלהן על פני המשטח דומה לחצי המישור העליון $y \geq 0$. נסמן את השפה במובן זה של S גם על ידי ∂S , כאשר המשמעות תצטרך להיות מובנת לפי ההקשר.

בגישה שמבלבלת באופן דומה, משטח S יקרא **משטח סגור** אם $\partial S = \emptyset$. כלומר, אם השפה המשטחית שלו ריקה. זה לא תואם להגדרה של סגור טופולוגי; כל המשטחים שלנו יהיו סגורים במובן הטופולוגי. אבל רק משטחים כמו ספירה הם "משטחים סגורים".

לבסוף, אם S משטח פרמטרי שאינו סגור, **האורינטציה החיובית** על השפה המשטחית שלו ∂S היא זו שאם צועדים בכיוונה על ∂S כאשר הראש מכוון בכיוון הנורמל $\hat{n}(s, t)$ שמתקבל מהפרמטריזציה, אז המשטח נמצא משמאל לצועד.

ניסוח של משפט סטוקס ושימושים

משפט 2. יהי S משטח פרמטרי גזיר ברציפות למקוטעין ודו צדדי בעל שפה גזירה ברציפות למקוטעין Γ לא ריקה אשר מכוונת בכיוון חיובי ביחס ל- S . יהי $\vec{F}(x, y, z)$ שדה וקטורי גזיר ברציפות על S . אז

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n} d\sigma$$

כלומר, העבודה של השדה לאורך Γ שווה לשטף של הרוטור $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ דרך כל משטח שחסום על ידי Γ .

דוגמאות:

1. נתון העקום

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad z = 3\}$$

נחשב את העבודה

$$\oint_{\Gamma} (z - y) dx + (x - z) dy + (y - x) dz$$

במקום לחשב את העבודה באופן ישיר, נחשב ראשית את הרוטור

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z - y & x - z & y - x \end{vmatrix} = (2, 2, 2)$$

ניקח כעת משטח S ששפתו Γ . נבחר S באופן שהחישוב יהיה קל במיוחד:

$$S = \{(x, y, z) \mid z = 3, \quad x^2 + y^2 \leq 16\}$$

זהו עיגול ברדיוס 4, ובנוסף $\hat{n} = \hat{\mathbf{k}}$. לכן

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma = \iint_S 2 d\sigma = 2 \cdot \pi \cdot 16 = 32\pi$$

נעיר לבסוף שהכיוון של הנורמל צריך להיות בהתאם לכיוון העקום.

לא היה נתון כיוון על Γ , אך לפי בחירתנו של $\hat{n}$ (כלפי מעלה), הכיוון על Γ צריך להיות נגד כיוון השעון בהסתכלות מלמעלה.

“ But we have reason to think that the annihilation of work is no less a physical impossibility than its creation, that is, than perpetual motion.

”

George Gabriel Stokes