

הרצאה 24: משפט גאוס

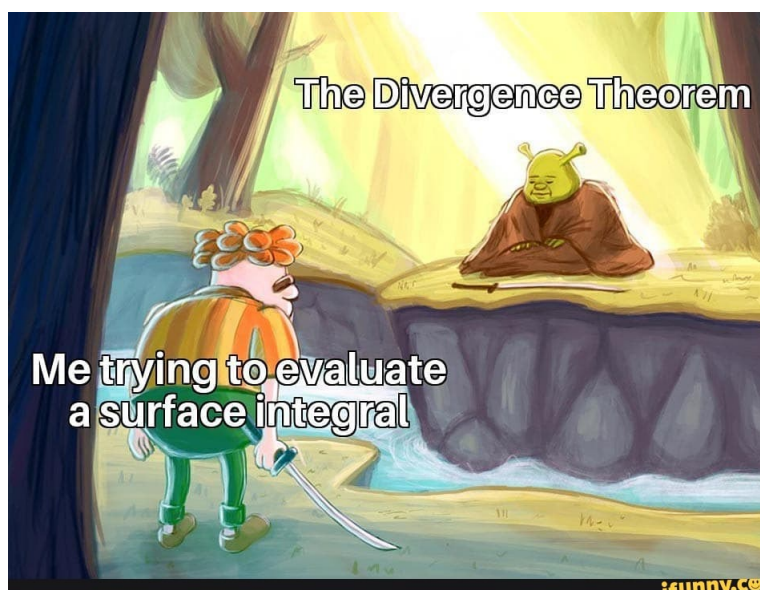
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

- | | |
|---|-------------------------------------|
| 2 | 1 אינטגרל משטחי (המשך) |
| 2 | 1.1 משפט הדיברגנץ של גאוס |



1 | אינטגרל משטחי (המשך)

1.1 משפט הדיברגנץ של גאוס

הגדרה של הדיברגנץ

נניח שנתון שדה וקטורי

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\hat{i} + Q(x, y, z)\hat{j} + R(x, y, z)\hat{k}$$

במחשבה פיסיקלית, אם ניקח משטח סגור S שמוכל כולו בים, אז נפח המים בתוך S הוא קבוע ולכן השטף דרך S יהיה אפס: $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma = 0$.

זה נכון בגלל שתי סיבות, ולכן יקרה בכל פעם ששתי סיבות אלה מתקיימות:

1. המים אינם דחיסים, כלומר המסה הסגולית שלהם קבועה. לא יתכן שבאותו נפח תהיה כמות משתנה של מים.

2. אין בתוך S מקור של מים או פתח ניקוז דרכם מים יכולים להיעלם.

כדי להתוודע בהיכרות ראשונה למושג הדיברגנץ, נניח שהשדה מתאר זרימה לא דחיסה.

תהי (x, y, z) נקודה. נבחן אם הנקודה היא מקור בעזרת הגבול

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\text{שטף דרך } \partial B_\epsilon(x, y, z)}{\text{נפח של } B_\epsilon(x, y, z)} \quad (\text{ההגדרה הפיסיקלית של הדיברגנץ})$$

• אם התוצאה היא 0, אז סימן שהנקודה (x, y, z) אינה מקור או ניקוז.

• אם התוצאה חיובית, סימן שהנקודה היא מקור.

• אם התוצאה שלילית, סימן שהנקודה היא ניקוז.

בכל המקרים, מדובר בממד ליחידת נפח, כלומר, מדובר בצפיפות מקור / ניקוז נפחית.

למשל, במקרה של שדה חשמלי, התוצאה היא צפיפות מטען.

אפשר להחליף את הכדור בכל צורה סבירה. למשל, תיבה פשוטה שהנקודה השמאלית, תחתונה וקרובה ביותר היא (x, y, z) ואורכי צלעותיה $\Delta x, \Delta y$ ו- Δz .

הנפח של התיבה הוא $\Delta x \Delta y \Delta z$.

נעריך את השטף (נורמל חיצוני ביחס לתיבה) דרך שפת התיבה על ידי חלוקת השפה לשלושה זוגות של פאות נגדיות.

ראשית, שתי הפאות שניצבות לציר ה- x . עבורן הנורמל הוא בכיוון $\pm \hat{i}$, ולכן רק P תורם לשטף. השטף דרך התיבה שממוקמת ב- x הוא בערך $-P(x, y, z) \Delta y \Delta z$, בעוד שהשטף דרך התיבה שממוקמת ב- $x + \Delta x$ הוא בערך $P(x + \Delta x, y, z) \Delta y \Delta z$.

נקבל ביטויים דומים עבור שני הזוגות האחרים של פאות, ובסך הכל השטף דרך שפת התיבה הוא בערך:

$$\begin{aligned} & (P(x + \Delta x, y, z) \Delta y \Delta z - P(x, y, z) \Delta y \Delta z) + (Q(x, y + \Delta y, z) \Delta x \Delta z - Q(x, y, z) \Delta x \Delta z) \\ & + (R(x, y, z + \Delta z) \Delta x \Delta y - R(x, y, z) \Delta x \Delta y) \end{aligned}$$

אם נחלק בנפח $\Delta x \Delta y \Delta z$, נקבל:

$$\begin{aligned} \approx & \frac{P(x + \Delta x, y, z) - P(x, y, z)}{\Delta x} \\ & + \frac{Q(x, y + \Delta y, z) - Q(x, y, z)}{\Delta y} + \frac{R(x, y, z + \Delta z) - R(x, y, z)}{\Delta z} \end{aligned}$$

לכן בגבול $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$, נקבל את הביטוי שבהגדרה הבאה.

הגדרה 1. יהי $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$ שדה וקטורי בעל נגזרות חלקיות בנקודה (x, y, z) . הדיברגנץ של $\vec{F}$ בנקודה (x, y, z) מוגדר על ידי:

$$(\operatorname{div} \vec{F})(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)$$

הערות ודוגמאות על הגדרת הדיברגנץ

הערות:

- הדיברגנץ הוא פונקציה סקלרית שמודדת / מאתרת מטענים של $\vec{F}$.
ליתר דיוק, $\operatorname{div} \vec{F}$ הוא צפיפות מטען נפחית.
- הדיברגנץ לוקח שדה וקטורי ומחזיר פונקציה סקלרית. אנחנו מכירים גם פעולה שעושה תהליך הפוך: הגרדיאנט.
- נוח לסמן $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, ואז מקבלים את השוויון המוכר $\operatorname{grad} f = \vec{\nabla} f$ ואת השוויון החדש $\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$.
- אפשר לשרשר (להרכיב) את הפעולות (בשתי דרכים, נדגיש את המעניינת יותר): אם f סקלרית, אז $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \equiv \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f)$ היא פונקציה סקלרית שנקראת **הלפלסיאן** של f ומסומנת Δf .
תרגיל: $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$.

דוגמאות:

1. $\vec{\nabla} \cdot (x^2\hat{i} + \hat{j} + z\hat{k}) = 2x + 0 + 1 \neq 0$. לכן זהו שדה עם מקורות בכל נקודה פרט לנקודות על המישור $x = -\frac{1}{2}$.

2. **משוואת מקסוול הראשונה** (James Clerk Maxwell, 1831 – 1879) היא

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho(x, y, z)$$

כאן $\vec{E}$ הוא שדה חשמלי ו- $\rho(x, y, z)$ הוא צפיפות מטען חשמלי ליחידת נפח.

משוואת מקסוול השנייה היא

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

כלומר, אין מקורות לשדה מגנטי.

3. חישוב פשוט מראה ש-

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \equiv 0, \quad (x, y, z) \neq 0$$

זהו שדה ללא מקורות פרט לראשית, שם הוא לא מוגדר ושיטתנו למדידת מקורות נכשלת.

ובאמת, הוא נוצר ממטען נקודתי, כאשר המשמעות היא שיש "צפיפות אינסופית" של מטען בראשית עצמה (בלבד).

ניסוח משפט הדיברגנץ של גאוס ודוגמאות לשימוש

נעבור כעת למשפט הדיברגנץ של גאוס.

נאמר שמשטח הוא C^1 למקוטעין אם הוא איחוד של מספר סופי של משטחים עבורם קיימת פרמטריזציה

$$R(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$$

כך ש- $x(s, t), y(s, t), z(s, t)$ גזירות ברציפות.

משפט 2. תהי $V \subset \mathbb{R}^3$ קבוצת ג'ורדן ששפתה משטח C^1 למקוטעין עם נורמל חיצוני. יהי $\vec{F}$ שדה וקטורי אשר גזיר ברציפות ב- $\bar{V}$. אז

$$\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \hat{n} \, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz$$

הגדרה: משטח מכונה משטח סגור אם הוא שפה של תחום חסום, $S = \partial V$.

כלומר, משפט גאוס תקף עבור משטחים סגורים.

נשים לב לנקודה מבלבלת במינוחים: לא מדובר בתנאי שהקבוצה S סגורה, אלא שאין לה "שפה משטחית" (עליה נדבר עוד בהמשך).

הפירוש של משפט גאוס: השטף דרך משטח סגור שווה לסך כל המקורות אשר כלואים בתוך המשטח.

דוגמאות:

1. שימוש ישיר: תהי S שפת הקובייה $V = [0, 1]^3$. אז

$$\iint_S (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot \hat{n} \, d\sigma = \iiint_V (1 + 1 + 1) \, dx \, dy \, dz = 3$$

6 אינטגרלים!

שכן נפח הקובייה הוא 1.

2. שינוי משטח: המשטח $S = \{z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 1\}$ אינו סגור. אם נוסיף את המכסה:

$$S_1 = \{x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$$

אז נקבל משטח סגור $S \cup S_1$, שהוא שפת החרוט V . לכן לפי משפט גאוס:

$$\begin{aligned} \iint_S (x^2 \hat{\mathbf{i}} + y^2 \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma &= \iint_{S \cup S_1} (x^2 \hat{\mathbf{i}} + y^2 \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma - \iint_{S_1} (x^2 \hat{\mathbf{i}} + y^2 \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma \\ &= \iiint_V (2x + 2) \, dx \, dy \, dz - \iint_{S_1} (x^2 \hat{\mathbf{i}} + y^2 \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma \end{aligned}$$

היות ש- V תחום סימטרי ביחס למישור xz ו- x פונקציה אנטי-סימטרית ביחס למישור xz , האינטגרל עליה מתאפס. בנוסף, על S_1 , מתקיים $z = 1$ ו- $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{k}}$. לכן:

$$\iint_S (x^2 \hat{\mathbf{i}} + y^2 \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma = 2 \cdot \underbrace{|V|}_{=\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2} - \underbrace{\iint_{S_1} 1 \, d\sigma}_{=|S_1|=\pi} = -\frac{\pi}{3}$$

“ It is not knowledge, but the act of learning, not the possession of but the act of getting there, which grants the greatest enjoyment.

”

Carl Friedrich Gauss