

הרצאה 23: אינטגרל משטחי מסוג ראשון ושני

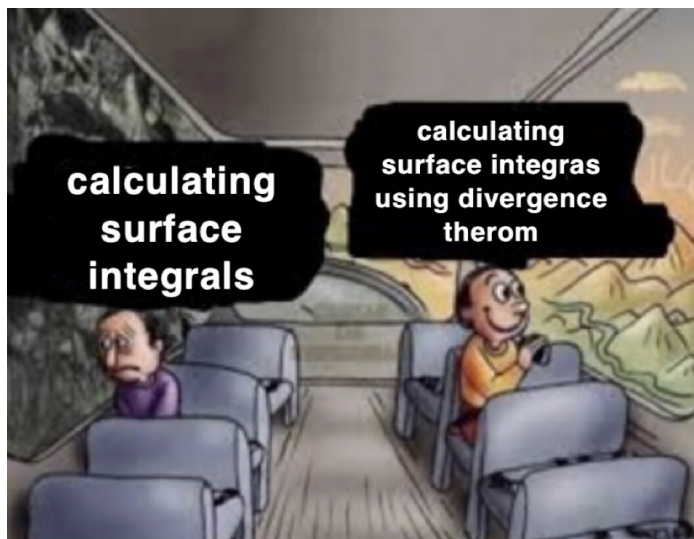
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1	אינטגרל משטחי
2	1.1	משטחים פרמטרים
6	1.2	אינטגרל משטחי מסוג ראשון
9	1.3	אינטגרל משטחי מסוג שני



אינטגרל משטחי

1

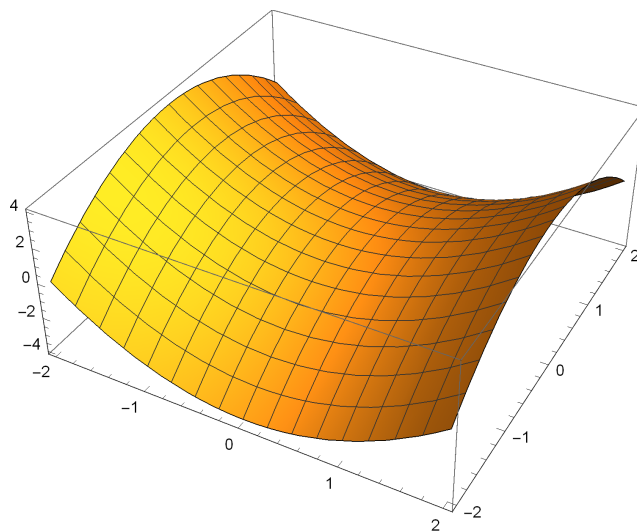
1.1 משטחים פרמטרים

משטחים מוכרים

בדומה לעקומים, גם משטחים אינם עניין חדש לגמרי.

1. גרף של פונקציה בשני משתנים, $z = f(x, y)$.

למשל, פרבולואיד היפרבולי: $z = x^2 - y^2$. זה נראה כמו אוכף של סוס; ראו איור 1.



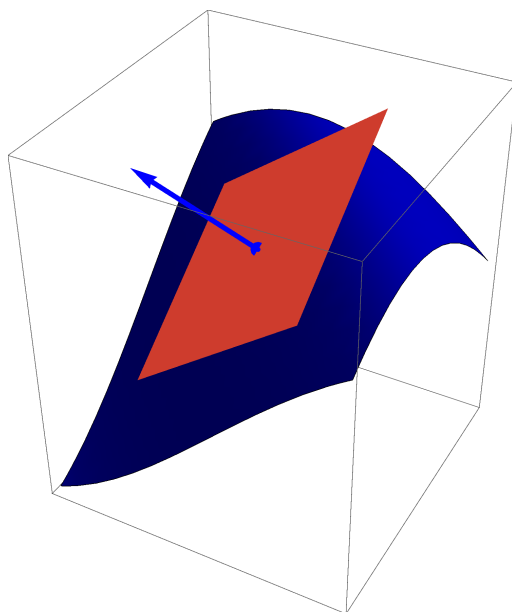
איור 1: ניתן לשחזר את הציור מהנוסחה על ידי ציור של החתכים עם מישורים פשוטים. החתכים הם פרבולות והיפרבולות, ומשם גם שם המשטח.

אם הפונקציה גזירה (דיפרנציאבילית) בנקודה מסוימת (x_0, y_0) אז ידוע שיש מישור משיק למשטח בנקודה המתאימה $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. בנוסף, הוקטור הבא הוא וקטור נורמל למישור המשיק הזה (אפשר לומר שהוא בעצם נורמל למשטח בנקודה):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right)$$

באופן כללי, אם חלקיק נע על גבי משטח, אז המהירות הרגעית שלו תשיק למשטח - כלומר, המהירות בכל רגע היא וקטור שמוכל בתוך המישור המשיק.

2. משטח רמה של פונקציה של שלושה משתנים: $f(x, y, z) = C$. זה המושג המקביל לקו גובה עבור פונקציה של שני משתנים.



איור 2: מישור משיק לגרף של פונקציה/משטח רמה של פונקציה ווקטור נורמל.

למשל, **היפרבולואיד חד-יריעתי**: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (ראו איור 3) ו**היפרבולואיד דו-יריעתי**: $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ (ראו איור 4).

אם $f(x, y, z)$ גזירה בנקודה מסוימת, ראינו שהגרדיאנט $\vec{\nabla} f$ מאונך למשטח (כלומר, למישור המשיק למשטח) בנקודה.

הגדרה של משטח פרמטרי

המקרים המוכרים הנ"ל של משטחים שימושיים, אך ישנו תיאור נוח מאוד של משטחים שנזדקק לו בהמשך. זהו תיאור פרמטרי, כמו עבור עקומים:

הגדרה: משטח פרמטרי הוא פונקציה $R : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ כאשר $D \subset \mathbb{R}^2$ תחום.

ברוב המקרים, D יהיה מלבן. ניתן לחשוב על המשטח בתור טרנספורמציה של המלבן (או מה שלא יהיה D) משוכנת בתוך המרחב. זהו משטח פרמטרי.

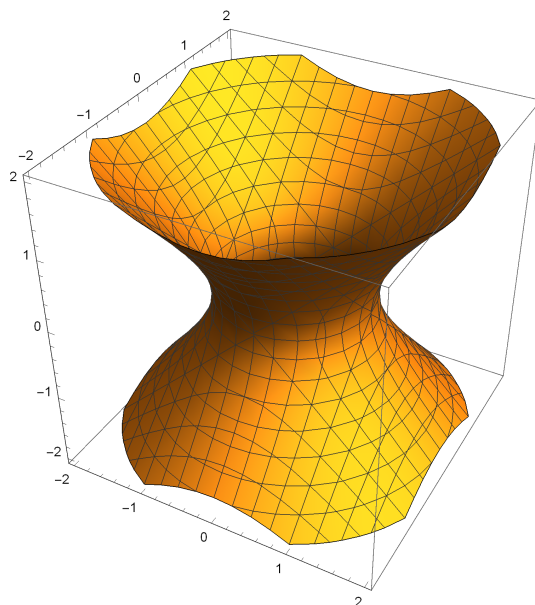
כלומר, משטח פרמטרי מתואר על ידי

$$R(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)), \quad (s, t) \in D$$

או בכתיב אחר,

$$\begin{cases} x = x(s, t) \\ y = y(s, t) \\ z = z(s, t) \end{cases}, \quad (s, t) \in D$$

דוגמה: ספרה, $x^2 + y^2 + z^2 = a$ ניתנת לתיאור פרמטרי כדלקמן, בדומה לקואורדינטות כדוריות.



איור 3: היפרבולואיד חד-יריעתי. החתכים בגובה קבוע הם מעגלים.

נקבע נקודה (x, y, z) על הספרה. הפרמטר הראשון הוא הזווית φ בין הוקטור (x, y, z) לבין ציר ה- z ; ראו איור 5. לפי המשולש ישר-הזווית בציור רואים ש- $z = a \cos \varphi$.

בנוסף, החתך של הספרה בגובה z הוא מעגל, כאשר בעזרת אותו משולש רואים שהרדיוס שלו $a \sin \varphi$. נסמן ב- θ את זווית הסיבוב המעגל הזה (כמו בפרמטריזציה של מעגל) ונקבל:

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \sin \varphi \\ y = a \sin \theta \sin \varphi \\ z = a \cos \varphi \end{cases}$$

כאשר $\theta \in [0, 2\pi]$ ו- $\varphi \in [0, \pi]$ כבר מכסה את כל הספרה.

וקטור נורמל למשטח פרמטרי

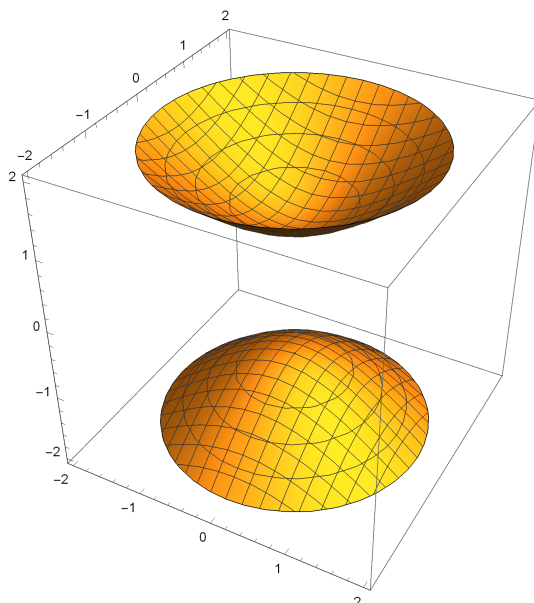
בהינתן משטח פרמטרי ונקודה $P = R(s_0, t_0)$ עליו, הנה שני עקומים שמוכלים במשטח ועוברים דרך P (ראו איור 6):

$$\begin{cases} \gamma_1(s) = (x(s, t_0), y(s, t_0), z(s, t_0)) \\ \gamma_2(t) = (x(s_0, t), y(s_0, t), z(s_0, t)) \end{cases}$$

שני הוקטורים המשיקים המתאימים $\vec{\gamma}_1'(s_0)$ ו- $\vec{\gamma}_1'(t_0)$ מוכלים במישור המשיק למשטח בנקודה P ולכן אם הם אינם מקבילים אז הוקטור הבא הוא נורמל:

$$\vec{n}(s_0, t_0) = \vec{\gamma}_1'(s_0) \times \vec{\gamma}_2'(t_0) = \left(\frac{\partial R}{\partial s} \times \frac{\partial R}{\partial t} \right)(s_0, t_0)$$

דוגמה: לכל גרף של פונקציה $z = f(x, y)$ יש פרמטריזציה שמתקבלת מעצם



איור 4: היפרבולואיד דו-יריעתי. עבור ערכים מסוימים של z , אין פתרונות למשוואה ולכן מתקבל אזור גבהים ריק.

היות המשטח גרף של פונקציה: $R(s, t) = (s, t, f(s, t))$ כאשר (s, t) בתחום הגדרת הפונקציה.

יש פרמטריזציות נוספות, שלפעמים יותר מוצלחות, אבל נדון כרגע בזו. נחשב את וקטור הנורמל:

$$\vec{n}(s, t) = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & f'_s \\ 0 & 1 & f'_t \end{pmatrix} = (-f'_s, -f'_t, 1)$$

נציין שבאופן דומה, לעקום $y = f(x)$ יש פרמטריזציה $\gamma(t) = (t, f(t))$, ווקטור משיק מתאים $\vec{\gamma}'(t) = (1, f'(t))$.

הגודל של הוקטור הנורמל תלוי בפרמטריזציה, אך הכיוון לא תלוי (אולי עד כדי היפוך).

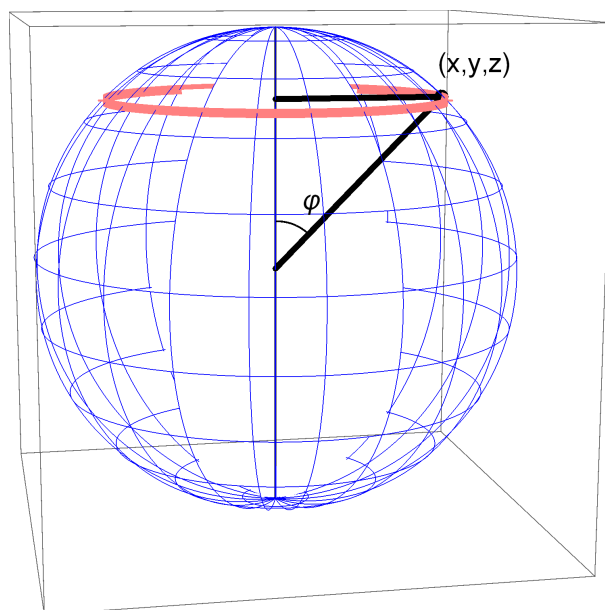
במקרים מסוימים, יתכן ש"הנורמל" מתאפס בפרמטריזציה נתונה. זהו מצב לא רצוי (בדומה לעקום לא חלק).

הגדרה: משטח פרמטרי גזיר ברציפות מכונה **דו צדדי** אם לכל $(s, t) \in D$ מתקיים כי

$$\left(\frac{\partial R}{\partial s} \times \frac{\partial R}{\partial t} \right)(s, t) \neq 0$$

המשמעות היא שניתן לקבוע באופן קונסיסטנטי כיוון של הנורמל ביחס למשטח, כך שבכל מסלול על פני המשטח הכיוון ישמר. בנוסף, עבור משטח דו צדדי סגור, אפשר לתאר במילה אחת את כיוון הנורמל: **חיצוני** או **פנימי**. במקרה כזה מספיק גם לבדוק את כיוון הנורמל בנקודה אחת.

דוגמה מפורסמת של משטח שאינו דו צדדי היא טבעת מביוס.



איור 5: פרמטריזציה של ספירה.

1.2 אינטגרל משטחי מסוג ראשון

הגדרה של אינטגרל משטחי מסוג ראשון

בדומה לאינטגרלים קווים, יש שני סוגים של אינטגרלים משטחיים: סוג ראשון עבור אינטגרנד סקלרי, וסוג שני עבור שדה וקטורי. בשונה מאינטגרלים קווים, האינטגרל המשטחי מהסוג השני מכמת גודל אחר מאשר עבודה.

נניח שנתון משטח $S \subset \mathbb{R}^3$:

$$S = \{R(s, t) : (s, t) \in D\} \quad (\text{פרמטריזציה})$$

איך מחשבים/מגדירים את שטח הפנים של S ? או את המסה/מטען של S , אם נתונה צפיפות מסה/מטען ליחידת שטח, $f(x, y, z)$?

נניח שנתונה $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה. ניקח חלוקה P של D ; זה משרה חלוקה של S לצורות שקרובות למקביליות. למשל, המלבן שקודקודיו

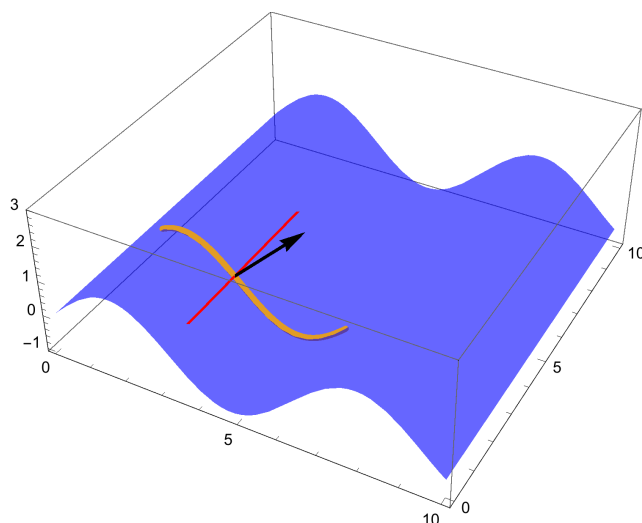
$$(s, t), (s + \Delta s, t), (s + \Delta s, t + \Delta t), (s, t + \Delta t)$$

עובר למקבילית מקורבת שקודקודה

$$R(s, t), R(s + \Delta s, t), R(s + \Delta s, t + \Delta t), R(s, t + \Delta t)$$

ולכן שטחה הוא בערך

$$|(R(s + \Delta s, t) - R(s, t)) \times (R(s, t + \Delta t) - R(s, t))|$$



איור 6: שני עקומים שמתקבלים בצורה פשוטה מהפרמטריזציה, ווקטור שמאונך לשניהם שהוא למעשה נורמל למשטח.

אם כך, אפשר לכתוב קירוב למסה/מטען הכולל/ת באמצעות סוג של סכום רימן:

$$\sum_{i,j} f(i,j) \quad (\text{שטח המקבילית ה-}(i,j) \text{ (נקודה במקבילית ה-}(i,j) \text{)})$$

$$\approx \sum_{i,j} f(R(\tilde{s}_i, \tilde{t}_j)) \left| \left(\frac{R(s_i + \Delta s_i, t_j) - R(s_i, t_j)}{\Delta s_i} \right) \times \left(\frac{R(s_i, t_j + \Delta t_j) - R(s_i, t_j)}{\Delta t_j} \right) \right| \Delta s_i \Delta t_j$$

כאשר פרמטר החלוקה שואף לאפס, $\Delta s_i, \Delta t_j \rightarrow 0$ ונקבל את המוטיבציה להגדרה הבאה.

הגדרה 1. יהי $S \subset \mathbb{R}^3$ משטח חסום ודו צדדי. תהי $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה. האינטגרל המשטחי מהסוג הראשון (אם קיים) של f על S מוגדר על ידי

$$\iint_S f(x, y, z) \, d\sigma = \iint_D f(R(s, t)) |\vec{n}(s, t)| \, ds \, dt$$

כלומר:

$$\iint_S f \, d\sigma = \iint_D f(x(s, t), y(s, t), z(s, t)) \left| \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} \right) (s, t) \right| \, ds \, dt$$

הערות:

- האינטגרל $\iint_D \dots dx dy$ הוא אינטגרל כפול. שימו לב כי $\iint_S f \, d\sigma$ אינו אינטגרל כפול אלא משהו חדש: אינטגרל משטחי מסוג ראשון.

זה מאפשר "אינטגרציה דו ממדית" על תחום אינטגרציה שאינו "שטוח".

- הביטוי $d\sigma = |\vec{n}(s, t)| \, ds \, dt$ מכונה אלמנט שטח סקלרי.

שטח פנים של משטח ותכונות של אינטגרל משטחי מסוג ראשון

הגדרה: יהי $S \subset \mathbb{R}^3$ משטח פרמטרי חסום וגזיר ברציפות. שטח הפנים של S מוגדר על ידי

$$A(S) = \iint_S 1 d\sigma$$

משפט 2: יהי $S \subset \mathbb{R}^3$ משטח פרמטרי חסום וגזיר ברציפות.

1. לינאריות. אם האינטגרלים המשטחיים $\iint_S f d\sigma$, $\iint_S g d\sigma$ שניהם קיימים אז לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים כי

$$\iint_S (\alpha f + \beta g) d\sigma = \alpha \iint_S f d\sigma + \beta \iint_S g d\sigma$$

(והאינטגרל באגף שמאל קיים).

2. אדיטיביות. אם האינטגרלים המשטחיים $\iint_{S_1} f d\sigma$, $\iint_{S_2} f d\sigma$ שניהם קיימים ושטח הפנים של $S_1 \cap S_2$ הוא 0, אז

$$\iint_{S_1 \cup S_2} f d\sigma = \iint_{S_1} f d\sigma + \iint_{S_2} f d\sigma$$

(והאינטגרל באגף שמאל קיים).

3. מוגדרות היטב. לכל שתי פרמטריזציות גזירות ברציפות של S אשר עבורן הנורמל מכוון בכל נקודה באותו כיוון מתקיים כי תוצאת האינטגרל המשטחי מהסוג הראשון זהה:

$$\iint_{\tilde{D}} f(\tilde{R}(s, t)) |\vec{n}(s, t)| ds dt = \iint_D f(R(s, t)) |\vec{n}(s, t)| ds dt$$

4. אין תלות בכיוון הנורמל. לכל שתי פרמטריזציות גזירות ברציפות של S אשר עבורן הנורמל מכוון בכל נקודה בכיוונים הפוכים מתקיים כי תוצאת האינטגרל המשטחי מהסוג הראשון זהה:

$$\iint_{\tilde{D}} f(\tilde{R}(s, t)) |\vec{n}(s, t)| ds dt = \iint_D f(R(s, t)) |\vec{n}(s, t)| ds dt$$

כלומר, תוצאת האינטגרל המשטחי מהסוג הראשון אינה תלויה בפרמטריזציה, כולל אפילו אם כיוון הנורמל התהפך.

דוגמאות של אינטגרל משטחי מסוג ראשון

דוגמאות:

1. אם S הוא גרף של פונקציה:

$$S = \{(x, y, g(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$$

זו פרמטריזציה!

אז

$$\begin{aligned} |S| &\equiv \iint_S 1 d\sigma \\ &= \iint_D |(1, 0, g_x) \times (0, 1, g_y)| dx dy = \iint_D \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dx dy \end{aligned}$$

2. נחשב את שטח הפנים של ספרה ברדיוס a , $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$. כפי שראינו, אפשר להציב בקואורדינטות כדוריות $r = a$ ולקבל פרמטריזציה לספרה S :

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \sin \varphi \\ y = a \sin \theta \sin \varphi \\ z = a \cos \varphi \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi), \varphi \in [0, \pi]$$

נחשב את הנורמל:

$$\begin{aligned} \vec{n}(\theta, \varphi) &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -a \sin \theta \sin \varphi & a \cos \theta \sin \varphi & 0 \\ a \cos \theta \cos \varphi & a \sin \theta \cos \varphi & -a \sin \varphi \end{vmatrix} \\ &= -a^2 \sin \varphi (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi) \end{aligned}$$

לכן

$$|S| = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi a^2 \sin \varphi d\varphi = 4\pi a^2$$

הערה: מעניין לשים לב שבפרמטריזציה של ספרה קיבלנו כי

$$\vec{n}(\theta, \varphi) = -a \sin \varphi (x(\theta, \varphi), y(\theta, \varphi), z(\theta, \varphi))$$

כלומר, קיבלנו כי הנורמל בנקודה מסוימת על פני הספרה שווה לכפולה בסקלר של הנקודה (x, y, z) .

1.3 אינטגרל משטחי מסוג שני

הגדרה של אינטגרל משטחי מסוג שני

נניח שנתון שדה וקטורי

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\hat{i} + Q(x, y, z)\hat{j} + R(x, y, z)\hat{k}$$

שמוגדר (לפחות) על משטח S .

נדמיין ש- $\vec{F}$ מתאר מהירות זרימה של מים בכל נקודה, ו- S הוא פילטר.

מהו נפח המים אשר עוברים דרך הפילטר ליחידת זמן? הגודל הזה נקרא **שטף**.

אם נקבע נקודה $(x, y, z) \in S$, רק מים שעוברים דרך S צריכים להיספר. כלומר, אם $\vec{F}$ מקביל למשטח, אז אין תרומה לשטף בנקודה הזו. מצד שני, אם $\vec{F}$ מאונך למשטח, התרומה תהיה מקסימלית.

באופן כללי, ההיטל על הנורמל למשטח הוא הגודל שתורם לשטף: $\vec{F} \cdot \hat{n}$. אם נכניס את הגודל הזה לתוך ההגדרה של אינטגרל משטחי מסוג ראשון (כלומר: נעשה אינטגרל של התרומות האלו על גבי על המשטח), נקבל את הביטוי שבתוך ההגדרה הבאה.

הגדרה 3. יהי S משטח חסום עם פרמטריזציה C^1 , ויהי $\vec{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ שדה וקטורי שרכיביו חסומים על S . האינטגרל המשטחי מהסוג השני / אינטגרל השטף (אם הוא קיים) מוגדר על ידי

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma \equiv \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_D \vec{F}(R(s, t)) \cdot \vec{n}(s, t) ds dt$$

כלומר:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_D \vec{F}(x(s, t), y(s, t), z(s, t)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} \right)(s, t) ds dt$$

היות שבאופן פורמלי (צורני):

$$, d\vec{\sigma} = \vec{n} ds dt = \hat{n} |\vec{n}| ds dt = \hat{n} d\sigma$$

נהוג לסמן כאמור את האינטגרל המשטחי מהסוג השני גם בסימון $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma$.

הביטוי $d\vec{\sigma}$ מכונה אלמנט שטח וקטורי.

תכונות של אינטגרל משטחי מסוג שני

משפט 4: יהי $S \subset \mathbb{R}^3$ משטח פרמטרי חסום וגזיר ברציפות.

1. לינאריות. אם האינטגרלים המשטחיים $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma$, $\iint_S \vec{G} \cdot \hat{n} d\sigma$ שניהם קיימים אז לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים כי

$$\iint_S (\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) \cdot \hat{n} d\sigma = \alpha \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma + \beta \iint_S \vec{G} \cdot \hat{n} d\sigma$$

(והאינטגרל באגף שמאל קיים).

2. אדיטיביות. אם האינטגרלים המשטחיים $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma$, $\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma$ שניהם קיימים ושטח הפנים של $S_1 \cap S_2$ הוא 0, אז

$$\iint_{S_1 \cup S_2} \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma$$

(והאינטגרל באגף שמאל קיים).

3. מוגדרות היטב. לכל שתי פרמטריזציות גזירות ברציפות של S אשר עבורן הנורמל מכון בכל נקודה באותו כיוון מתקיים כי תוצאת האינטגרל המשטחי מהסוג השני זהה:

$$\iint_{\tilde{D}} \vec{F}(\tilde{R}(s, t)) \cdot \vec{\tilde{n}}(s, t) ds dt = \iint_D \vec{F}(R(s, t)) \cdot \vec{n}(s, t) ds dt$$

4. היפוך סימן עם היפוך נורמל. לכל שתי פרמטריזציות גזירות ברציפות של S אשר עבורן הנורמל מכון בכל נקודה בכיוונים הפוכים מתקיים כי תוצאת האינטגרל המשטחי מהסוג השני זהה:

$$\iint_{\tilde{D}} \vec{F}(\tilde{R}(s, t)) \cdot \vec{\tilde{n}}(s, t) ds dt = - \iint_D \vec{F}(R(s, t)) \cdot \vec{n}(s, t) ds dt$$

החישוב של האינטגרל המשטחי מהסוג הראשון כלל לא תלוי בפרמטריזציה.

החישוב של האינטגרל המשטחי מהסוג השני תלוי בפרמטריזציה, אך ורק במובן שאם נבחר פרמטריזציה עם נורמל בכיוון הפוך, תמיד נקבל את אותה תשובה עם היפוך סימן. לכן כאשר מחשבים אינטגרל משטחי מסוג שני, יש לציין ראשית מהו כיוון הנורמל הרצוי על המשטח. אם המשטח דו צדדי, מספיק לציין את כיוון הנורמל בנקודה אחת, ואז משיקולי רציפות כיוונו נקבע בכל נקודה.

דוגמאות של אינטגרל משטחי מסוג שני

דוגמאות:

1. נחשב את השטף של $x^2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ דרך $S = \{x + 2y + z = 1, x, y, z \geq 0\}$.

זהו חלק מתוך מישור, והחלק הזה הוא משולש. נחשב את השטף כאשר הנורמל בנקודה $(1, 0, 0)$ הוא בעל רכיב z חיובי.

נבחר פרמטריזציה:

$$\left(x, \frac{1}{2}(1-x-z), z\right), \quad x, z \geq 0, \frac{1}{2}(1-x-z) \geq 0$$

נחשב את הנורמל:

$$\vec{n}(x, z) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right)$$

קיבלנו רכיב z שלילי, ולכן נחשב לפי ההגדרה אבל נשים בחוץ סימן מינוס:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = - \iint_D (x^2, 1, z) \cdot \left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right) dx dz = \iint_D \left(\frac{1}{2}x^2 + 1 + \frac{1}{2}z\right) dx dz$$

התחום D (שמתואר בשורה של הפרמטריזציה) הוא משולש במישור xz , והוא תחום פשוט שניתן לבצע עליו את האינטגרציה כך:

$$\iint_D \left(\frac{1}{2}x^2 + 1 + \frac{1}{2}z\right) dx dz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\frac{1}{2}x^2 + 1 + \frac{1}{2}z\right) dz\right) dx = \frac{5}{8}$$

(פרטי החישוב של האינטגרלים הנשנים מושארים לבדיקה עצמית).

2. נחשב את השטף של

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

דרך הספרה $S_a = \{x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$.

ראינו כבר פרמטריזציה של S_a (כולל חישוב נורמל). נציב הכל ונקבל:

$$\begin{aligned} \iint_{S_a} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{a \cos \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{i}} + a \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{j}} + a \cos \varphi \hat{\mathbf{k}}}{a^3} \\ &\quad \cdot (a^2 \sin \varphi (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)) d\varphi d\theta = 4\pi \end{aligned}$$

כלומר, השטף זהה לכל a .

כלומר, מכל ספירה סביב הראשית "פורצים" 4π ליטרים ליחידת זמן.

כלומר, בראשית יש **מקור נקודתי** של מים. יש "חוק שימור" שלפיו לא משנה מה הרדיוס של הספרה, כמות המים שעוברת בה ליחידת זמן צריכה להיות זהה לכמות המים שיוצאים מהמזרקה ליחידת זמן.

השדה $\vec{F}$ הוא למעשה שדה חשמלי שיוצר מטען נקודתי בראשית.

איך מודדים מטען/מקורות מים? והאם יש גרסה יותר כללית של התופעה הזו, של חוק השימור? הנושא הבא עונה על שתי השאלות הללו.

“ *I have had my results for a long time: but I do not yet know how I am to arrive at them.* ”

Carl Friedrich Gauss