

הרצאה 22: משפט גרין

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1 אינטגרל קווי (המשך)
2	1.1 משפט גרין



$$\oint_C Pdx + Qdy$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

1 | אינטגרל קווי (המשך)

1.1 משפט גרין

ניסוח משפט גרין ודוגמאות פשוטות

משפט גרין הוא משפט ראשון מבין כמה משפטים שמקשרים בין סוגים שונים של אינטגרלים. כל הנושא הוא במישור (המשפט הבא אחר כך יהיה במרחב).

משפט 1. יהי $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ עקום רציף, גזיר ברציפות למקוטעין, פשוט וסגור. יהי

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y) \hat{i} + Q(x, y) \hat{j}$$

שדה וקטורי שגזיר ברציפות (כלומר, P ו- Q גזירים ברציפות) בכל $\overline{\text{int } \Gamma}$. אז

$$\oint_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{\text{int } \Gamma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy$$

הערות:

- חשוב לשים לב שהאינטגרל הקווי במשפט הוא בכיוון **חיובי**.

- אם נסמן $D = \text{int } \Gamma$, יש לנו בעצם

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$

אבל זהירות! לא כל תחום D הוא פנים של עקום ג'ורדן.

- פירוש התנאי $\vec{F} \in C^1(\overline{\text{int } (\Gamma)})$ הוא שיש קבוצה פתוחה קצת יותר גדולה, כלומר שמכילה את $\overline{\text{int } (\Gamma)}$, שבה השדה הוקטורי גזיר ברציפות.

שימושים בסיסיים במשפט גרין

יש שלושה שימושים בסיסיים של משפט גרין. יש כמובן גם שימושים רבים נוספים, אבל נראה שלושה שימושים נפוצים.

דוגמאות:

1. שימוש ישיר: אם Γ עקום סגור כלשהו, אז

$$\oint_{\Gamma} (y + e^{x^2} \sin x) dx + (x - \cos(y^2)) dy = \iint_{\text{int } \Gamma} (1 - 1) dx dy = 0$$

2. החלפה למסלול יותר קל: יהי Γ החלק העליון של מעגל היחידה, מהנקודה $(1,0)$ לנקודה $(-1,0)$. נרצה לחשב את

$$I = \int_{\Gamma} x^2 dx + (x + e^{y^2} \sin y) dy$$

חישוב ישיר כאן הוא קשה מדי. בנוסף, היות שהמסלול לא סגור, אי אפשר להשתמש במשפט גרין. נוסיף ונחסיר אינטגרל על מסלול אחר, כך שביחד נוצר מסלול סגור. נסמן ב- Γ' את הקטע מ- $(-1,0)$ ל- $(1,0)$. אז $\Gamma \cup \Gamma'$ מסלול סגור, ולכן בעזרת אדיטיביות ומשפט גרין:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma \cup \Gamma'} x^2 dx + (x + e^{y^2} \sin y) dy - \int_{\Gamma'} x^2 dx + (x + e^{y^2} \sin y) dy \\ &= \iint_D 1 dx dy - \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

3. חישוב שטח בעזרת אינטגרל קווי מסוג שני: אם נבחר את $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$ כך שיתקיים $Q_x - P_y \equiv 1$ בתחום, אז

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = A(D) \quad (\text{השטח של } D)$$

אפשר לבחור למשל את השדה $-y\hat{i}, x\hat{j}$ או $-\frac{y}{2}\hat{i} + \frac{x}{2}\hat{j}$.

4. זהירות! נתבונן באינטגרל הבא:

$$I = \oint_{x^2+y^2=1} -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

מצד אחד,

$$Q_x - P_y = \frac{x^2 + y^2 - 2x \cdot x}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} \equiv 0$$

לכן לפי משפט גרין, $I = 0$. מצד שני, אם נחשב ישירות בעזרת הפרמטריזציה $x = \cos t, y = \sin t$:

$$I = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (\cos t) \right) dt = 2\pi$$

השגיאה היא במשפט שנמתח עליו קו: השדה אינו גזיר ברציפות בפנים של העקום (עיגול היחידה) בגלל הראשית, ולכן משפט גרין אינו תקף. התשובה הנכונה היא $I = 2\pi$.

השדה בדוגמה האחרונה מכונה **השדה הסינגולרי בראשית**, והוא דוגמה חשובה גם להמשך.

תחום פשוט קשר

שיטת ההוכחה מאפשרת גם להדביק שני "חלקי בננה" משוקפים (שבהם המשפט כן נכון) לתחום טבעתי, שאינו פנים של עקום. לכן, בעצם, המשפט נכון גם בתחום כזה, אם נזהרים. זהו תוכן המשפט הבא, שמכליל את משפט גרין.

ראשית נגדיר מושג קשור חשוב.

הגדרה 2. תחום $D \subset \mathbb{R}^2$ נקרא פשוט-קשור אם לכל עקום סגור, פשוט ורציף $\Gamma \subset D$ מתקיים ש- $\text{int } \Gamma \subset D$.

פנים של עקום סגור, פשוט ורציף הוא תמיד פשוט-קשור. לעיתים קרובות זה נכון גם הפוך, אם כי לא תמיד.

הגדרה שקולה של פשוט-קשור, בגרסה אינטואיטיבית שלה: כל עקום סגור, פשוט ורציף בתוך התחום ניתן לכיווץ רציף אל נקודה בודדת, בלי לחרוג מהתחום. היתרון בהגדרה זו (שנראית יותר מסובכת) הוא שניתן להשתמש בה גם ב- $\mathbb{R}^3$.

משפט גרין לתחום רב קשרי

בתור הקדמה למשפט גרין עבור תחום עם מספר סופי של חורים, נדון בתחום עם חור אחד. נתבונן בטבעת $D = \{1 < x^2 + y^2 < 2\}$. זהו לא פנים של עקום ולכן משפט גרין לא תקף, לפחות בינתיים. מצד שני, בשני החצאים

$$D_+ = D \cap \{x > 0\}, \quad D_- = D \cap \{x < 0\}$$

המשפט כן תקף. לכן אם $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$ שדה וקטורי ב- D , אז

$$\oint_{\partial D_i} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{D_i} (Q_x - P_y) dx dy, \quad i = 1, 2$$

אם נחבר את שתי המשוואות האלו, נקבל מצד אחד את $\iint_D (Q_x - P_y) dx dy$. מצד שני, המסלולים שעליהם האינטגרל הקווי לא מתבטל בין ∂D_+ לבין ∂D_- הם השפה החיצונית של D : $\Gamma_1 = \{x^2 + y^2 = 2\}$ בכיוון חיובי, והשפה הפנימית של D : $\Gamma_2 = \{x^2 + y^2 = 1\}$ בכיוון שלילי. לסיכום,

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \oint_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$

ניתן לחשוב על אגף שמאל בתור אינטגרל קווי מסוג שני על השפה **בכיוון חיובי ביחס לתחום** (עבור השפה הפנימית, זה הפוך מהכיוון החיובי שהגדרנו עד כה, שהיה למעשה כיוון חיובי ביחס לפנים של העקום).

לסיכום, באופן דומה לנ"ל, ניתן להוכיח את המשפט הבא:

משפט 3: יהי D תחום חסום ששפתו מורכבת מהעקומים הרציפות, סגורים, פשוטים וגזירים ברציפות למקוטעין הבאים:

• שפה חיצונית Γ .

• מספר שפות פנימיות לא מנוונות ולא חופפות של חורים בתוך התחום $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$.

יהי $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$ שדה וקטורי ממחלקה C^1 ב- $\bar{D}$. אז

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{s} := \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$

תנאי מספיק לכך ששדה דו ממדי הוא משמר

משפט 4. יהי $D \subset \mathbb{R}^2$ תחום, ויהי $\vec{F} \in C^1(D)$. נניח שמתקיים התנאי $P_y \equiv Q_x$ בכל D .

1. אם D תחום פשוט-קשר, אז $\vec{F}$ משמר.
2. אם D תחום רב קשרי עם n חורים, אז $\vec{F}$ משמר אם ורק אם קיימים n מסלולי ג'ורדן גזירים ברציפות למקוטעין עבורם מתקיימים התנאים הבאים.
 - א. כל מסלול מקיף בדיוק אחר מהחורים.
 - ב. לכל חוק יש מסלול שמקיף אותו.
 - ג. לכל אחד מהמסלולים, האינטגרל הקווי מהסוג השני של $\vec{F}$ לאורכו היא 0.

סיכום עבור שדה משמר

בתחום כללי, שדה הוא משמר אם ורק אם העבודה לאורך כל מסלול סגור היא 0 אם ורק אם קיימת פונקצית פוטנציאל. בנוסף, תנאי הכרחי אך לא מספיק לכך שהשדה משמר הוא $P_y \equiv Q_x$.

בתחום פשוט קשר, ידוע בנוסף שהשדה משמר אם ורק אם $P_y \equiv Q_x$.

בתחום רב קשרי עם שפה חיצונית Γ ושפות פנימיות $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, אם ידוע כי $P_y \equiv Q_x$ אז השדה משמר אם ורק אם

$$\int_{\Gamma_k} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:
1. תיאור פרמטרי של מישור.

“ *Change is inevitable. Growth is optional.*

”

John C. Maxwell