

הרצאה 21: אינטגרל קווי מסוג שני, שדה משמר

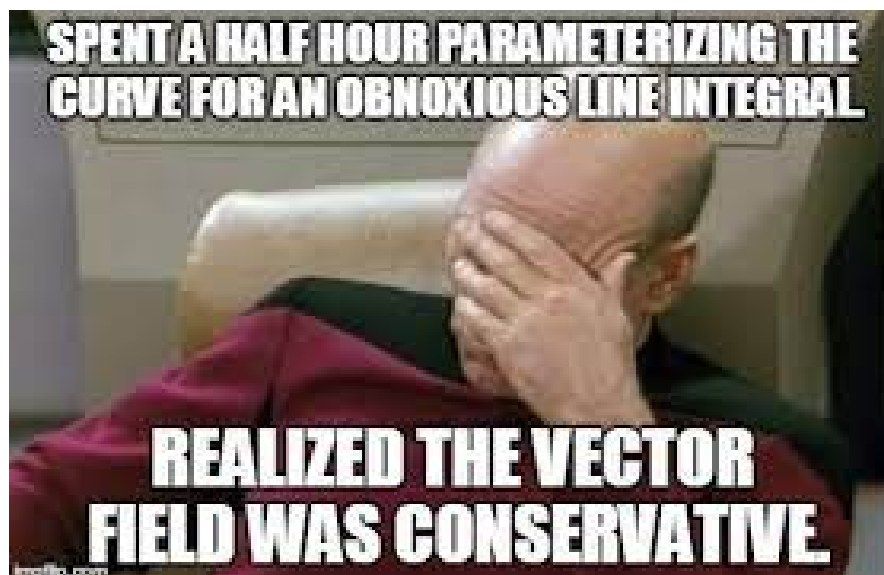
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1	אינטגרל קווי (המשך)
2	1.1	אינטגרל קווי מסוג שני (המשך)
4	1.2	שדה משמר



1 | אינטגרל קווי (המשך)

1.1 אינטגרל קווי מסוג שני (המשך)

דוגמה של חישוב אינטגרל קווי מסוג שני, הערות לגבי ההגדרה, כיוון חיובי על מסלול

דוגמה: נחשב את העבודה של השדה $y\hat{i} + x\hat{j}$ לאורך החצי הימני של מעגל היחידה:

$$\int_{\Gamma} y dx + x dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t (-\sin t) + \cos t \cos t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t) dt = \frac{1}{2} \sin(2t) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

אם המסלול Γ סגור, נסמן $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$.

עבור מסלול סגור במישור, **הכיוון החיובי** על המסלול הוא הכיוון שבו אדם שעומד על המסלול (ראש בכיוון החוצה מהדף) והולך בהתאם לכיוון, רואה את המסלול משמאלו. כפי שמיד נראה, לכיוון יש השפעה על אינטגרל העבודה. אם הכיוון חיובי, נסמן $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$.

הערה: איזה סוג אינטגרל קווי הוא $\int_{\Gamma} P dx$? סוג ראשון או שני?

זה לא סוג ראשון, כי אין שם כלל גודל של משיק.

זה יכול להיות מבלבל, אבל $\int_{\Gamma} P dx$ הוא אחד הביטויים באינטגרל הקווי מסוג שני.

אפשר גם לחשוב עליו כאינטגרל קווי מסוג שני, אבל לא של $\vec{F}$ אלא של $(P, 0)$ (כלומר, $(P\hat{i})$).

תכונות של אינטגרל קווי מסוג שני

משפט 1: יהי Γ עקום גזיר.

1. **לינאריות:** אם האינטגרלים הקווים מהסוג השני $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$, $\int_{\Gamma} \vec{G} \cdot d\vec{s}$ קיימים, אז לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\int_{\Gamma} (\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) \cdot d\vec{s} = \alpha \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \beta \int_{\Gamma} \vec{G} \cdot d\vec{s}$$

(והאינטגרל הקווי מסוג שני באגף שמאל קיים).

2. **אדיטיביות:** אם $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ וכן $\ell(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = 0$ אז

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

(בתנאי ששני האינטגרלים הקווים מהסוג השני באגף ימין קיימים).

3. תהיינה $\gamma(t)$ ו- $\tilde{\gamma}(t)$ שתי פרמטריזציות של Γ . אם $\gamma(t)$ ו- $\tilde{\gamma}(t)$ מכוונים באותו כיוון על Γ (משרים את אותה אוריינטציה), אז

$$\int_a^b \left(\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) \right) dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left(\vec{F}(\tilde{\gamma}(t)) \cdot \vec{\tilde{\gamma}}'(t) \right) dt$$

4. תהיינה $\gamma(t)$ ו- $\tilde{\gamma}(t)$ שתי פרמטריזציות של Γ . אם $\gamma(t)$ ו- $\tilde{\gamma}(t)$ משרים אוריינטציות הפוכות, אז

$$\int_a^b \left(\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) \right) dt = - \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left(\vec{F}(\tilde{\gamma}(t)) \cdot \vec{\tilde{\gamma}}'(t) \right) dt$$

כלומר, האינטגרל הקווי מסוג שני לא תלוי בפרמטריזציה, עד כדי היפוך שהופך סימן.

הערה: יש נקודה מבלבלת בסימון. אין דרך להבין מהו הכיוון שיש לקחת על העקום Γ בחישוב של אינטגרל קווי מסוג שני $\int_{\Gamma} \dots$. לכן בד"כ זה יצוין במפורש בנפרד מהסימון. המקרה יוצא דופן הוא מסלול סגור, שאז כאמור יש סימון לכיוון החיובי.

הגדרה: אם עקום Γ נתון עם אוריינטציה עליו, אז $-\Gamma$ יסמן את אותו עקום באוריינטציה הפוכה.

כלומר,

$$\int_{-\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

אבל

$$\int_{-\Gamma} f ds = \int_{\Gamma} f ds$$

הגדרה: אם Γ הוא "שרשור" של מספר עקומים גזירים אז נאמר ש- Γ גזיר למקוטעין ונגדיר את האינטגרל הקווי לאורך Γ על ידי סכום.

כיוון חיובי על עקום סגור

יהי Γ עקום סגור, פשוט ורציף (עקום ג'ורדן).

הגדרה לא רשמית: הכיוון החיובי עליו הוא הכיוון שבו צריך לצעוד על Γ כאשר הראש יוצא מהדף על מנת שהפנים של Γ יהיה כל הזמן בצד שמאל.

הגדרה: יהי Γ עקום סגור, פשוט וגזיר למקוטעין. האינטגרל הקווי מסוג שני בכיוון החיובי על Γ מסומן על ידי $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$.

1.2 שדה משמר

הגדרה של שדה משמר

דוגמה: נחשב את האינטגרל הקווי מסוג שני של השדה $y^2\hat{i} + x^2\hat{j}$ לאורך מסלולים שונים שמחברים בין הנקודות $(0,0)$ ו- $(1,1)$.

המסלול הראשון Γ_1 הוא הקו הישר ביניהם. פרמטריזציה:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

ולכן

$$\int_{\Gamma_1} y^2 dx + x^2 dy = \int_0^1 (t^2 \cdot 1 + t^2 \cdot 1) dt = \frac{2}{3}$$

המסלול השני Γ_2 מורכב משני ישרים: מ- $(0,0)$ ל- $(1,0)$, ומשם ל- $(1,1)$. נוכל לבחור פרמטריזציה לכל חלק בנפרד:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \quad t \in [0, 1] \quad \text{ו-} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}, \quad t \in [0, 1]$$

לכן:

$$\int_{\Gamma_2} y^2 dx + x^2 dy = \int_0^1 (0 \cdot 1 + t^2 \cdot 0) dt + \int_0^1 (t^2 \cdot 0 + 1 \cdot 1) dt = 1$$

המסלול השלישי Γ_3 הוא לאורך הפרבולה $y = x^2$, כלומר

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

נקבל

$$\int_{\Gamma_3} y^2 dx + x^2 dy = \int_0^1 t^4 \cdot 1 + t^2 \cdot 2t dt = \frac{7}{10}$$

התוצאות שונות!

בד"כ $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ לא תלוי רק בנקודות הקצה של Γ , אלא ממש בכל המסלול.

הגדרה 2. שדה וקטורי $\vec{F}$ נקרא משמר בתחום D אם לכל שתי נקודות $A, B \in D$ מתקיים התנאי הבא: לכל שני מסלולים חלקים למקוטעין Γ, Γ' מ- A ל- B שמוכלים ב- D ,

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\Gamma'} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

כלומר, שדה וקטורי $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$ הוא משמר בתחום D אם אינטגרל העבודה לאורך עקום שמוכל ב- D תלוי רק בקצוות העקום.

המושג של שדה משמר הוא חשוב במספר רב של תחומים ויש לו יישומים רבים. זהו מושג חשוב גם בפיסיקה. למשל, שדה כבידה הוא שדה משמר אבל חיכוך אינו משמר: אם בולמים לאורך קו ישר בין שתי נקודות, אפקט הבלימה יהיה מופחת ביחס לבלימה לאורך חצי מעגל (למשל) בין אותן שתי נקודות.

משפט שלוש השקילויות עבור שדה משמר

יש בעיה פרקטית עם ההגדרה: בהינתן שדה וקטורי, קשה לבדוק שהוא משמר - כי צריך כביכול לבדוק ש"לכל עקום...". המשפט הבא נותן אפיון מאוד שימושי להיותו של שדה משמר, וגם מספק אינספור דוגמאות.

ננסה אותו עבור $\mathbb{R}^3$ ונוכיח אותו עבור $\mathbb{R}^2$; אפשר להבין לבד איך לנסח/להוכיח אותו במקרה החסר.

משפט 3. יהי $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$ שדה וקטורי רציף בתחום D . התנאים הבאים שקולים:

1. $\vec{F}$ שדה משמר.

2. לכל מסלול Γ רציף, סגור, פשוט וחלק למקוטעין שמוכל ב- D מתקיים כי $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$.

3. קיימת פונקציה $U : D \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה ברציפות בתחום D כך ש- $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$, כלומר:

$$\begin{cases} U_x(x, y, z) = P(x, y, z) \\ U_y(x, y, z) = Q(x, y, z) \\ U_z(x, y, z) = R(x, y, z) \end{cases}, \quad (x, y, z) \in D$$

הגדרה: אם היא קיימת, הפונקציה U בסעיף 3 נקראת **פונקציית פוטנציאל** עבור השדה הוקטורי $\vec{F}$.

הערה: אם $U(x, y, z)$ פונקציית פוטנציאל עבור $\vec{F}$, אז גם $U(x, y, z) + C$ פונקציית פוטנציאל עבור $\vec{F}$ לכל $C \in \mathbb{R}$ (קבוע). בכיוון ההפוך, אם U_1 ו- U_2 פונקציות פוטנציאל עבור $\vec{F}$, אז:

$$\vec{\nabla}(U_1 - U_2) = \vec{F} - \vec{F} = \vec{0}$$

ולכן $U_1 - U_2$ קבועה (D הוא תחום ולכן קשיר), כלומר, $U_2 = U_1 + C$.

בפיסיקה מסמנים לעיתים שדה וקטורי שמייצג גודל פיסיקלי F באופן $Pdx + Qdy$.

אם השדה משמר, אז אומרים שמדובר ב**דיפרנציאל שלם** ומסמנים

$$dF = Pdx + Qdy$$

במקרה זה, הגודל F הוא גם פונקציית פוטנציאל.

אם השדה לא משמר, אז אומרים שמדובר ב**דיפרנציאל חלקי** ומסמנים

$$\delta F = Pdx + Qdy$$

במקרה זה, אין פונקציית פוטנציאל וכדי לחשב את F יש לבצע אינטגרל קווי מסוג שני.

דוגמה: החוק הראשון של התרמודינמיקה אומר שהשינוי באנרגיה הפנימית של מערכת בתהליך תרמודינמי שווה להפרש בין כמות החום שהתווספה לבין העבודה שהמערכת ביצעה. נהוג לכתוב אותו באופן

$$dU = \delta Q - \delta W$$

הסימון מרמז שהאנרגיה הפנימית ברגע נתון אינה תלויה בתהליך התרמודינמי אלא רק במצב המערכת באותו רגע, בעוד שהחום והעבודה תלויים בפרטי התהליך כולו ולא רק במצב הנוכחי.

חישוב של עבודה בעזרת פונקצית פוטנציאל

מתוכן ההוכחה, אנו רואים את המסקנה השימושית הבאה.

מסקנה: אם $\vec{F}$ שדה משמר רציף בתחום D , אז לכל פונקצית פוטנציאל $U \in C^1(D)$ של $\vec{F}$ מתקיים כי

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = U(B) - U(A)$$

לכל עקום $\Gamma \subset D$ רציף וגזיר למקוטעין שנקודת ההתחלה שלו A ונקודת הסיום שלו B .

דוגמאות עם פונקציות פוטנציאל

דוגמאות:

1. דוגמה מהחיים: שדה כבידה הוא משמר.

2. דוגמה מהחיים: חיכוך אינו משמר.

3. השדה הוקטורי

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{\nabla}(xyz) = (yz, xz, xy)$$

הוא משמר כי הוא גרדיאנט של פונקציה.

4. האם השדה $(e^{xy} + xye^{xy})\hat{i} + x^2e^{xy}\hat{j}$ משמר ב- $\mathbb{R}^2$? נבדוק אם קיים פוטנציאל $U(x, y)$, כלומר:

$$\begin{cases} U_x = e^{xy} + xye^{xy} \\ U_y = x^2e^{xy} \end{cases}$$

לפי השורה השנייה,

$$U(x, y) = xe^{xy} + C(x)$$

נציב לשורה הראשונה:

$$e^{xy} + xye^{xy} = U_x(x, y) = e^{xy} + xye^{xy} + C'(x)$$

לכן $C'(x) = 0$ ו- $C(x) \equiv c$. מצאנו אם כך פונקציית פוטנציאל $U(x, y) = xe^{xy}$ (וניתן להוסיף קבוע שרירותי). לכן השדה משמר.

5. האם השדה $e^{xy}\hat{i} + x^2e^{xy}\hat{j}$ משמר ב- $\mathbb{R}^2$? נבדוק אם קיימת פונקציית פוטנציאל. הפעם התנאים הם

$$\begin{cases} U_x = e^{xy} \\ U_y = x^2e^{xy} \end{cases}$$

כמו קודם, מהשורה השנייה מקבלים

$$U(x, y) = xe^{xy} + C(x)$$

נציב לשורה הראשונה:

$$e^{xy} = U_x(x, y) = e^{xy} + xye^{xy} + C'(x)$$

לכן $C'(x) = -xye^{xy}$. זו סתירה - ולכן אין פונקציית פוטנציאל, והשדה לא משמר.

שדה משמר מקומית

מתברר שיש תנאי להיותו של שדה משמר שהוא עוד יותר פשוט לבדיקה מאשר קיום פונקציית פוטנציאל. אבל - יש להזהר.

משפט 4. יהי $\vec{F}$ שדה C^1 משמר בתחום D .

1. אם מדובר בשדה דו ממדי, כלומר, $D \subset \mathbb{R}^2$ ו- $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$, אז

$$Q_x \equiv P_y$$

2. אם מדובר בשדה תלת ממדי, כלומר, $D \subset \mathbb{R}^3$ ו- $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$, אז

$$\begin{cases} P_y \equiv Q_x \\ P_z \equiv R_x \\ Q_z \equiv R_y \end{cases}$$

דוגמה: השדה $e^{xy}\hat{i} + x^2e^{xy}\hat{j}$ לא משמר כי

$$Q_x = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy} \neq xe^{xy} = P_y$$

למה צריך להזהר? כי זה לא אס"ם.

דוגמה: ראינו ש-

$$\oint_{x^2+y^2=1} -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = 2\pi$$

ולכן השדה לא משמר בתחום $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. אבל:

$$\begin{cases} Q_x = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ Q_x = -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

והם שווים.

כלומר, התנאי $P_y = Q_x$ הוא תנאי הכרחי אבל לא מספיק להיות השדה משמר.

הערה: שדה שמקיים $Q_x = P_y$ נקרא לפעמים משמר מקומית.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. סוגי משטחים (גרף של פונקציה $f(x, y)$, משטח רמה של פונקציה $F(x, y, z)$, וחישוב נורמל.

“ *There is hardly any theory which is more elementary [than linear algebra], in spite of the fact that generations of professors and textbook writers have obscured its simplicity by preposterous calculations with matrices.*

”

Jean Dieudonné