

הרצאה 20: אינטגרל קווי מסוג ראשון ושני

יוחאי מעין

הערות

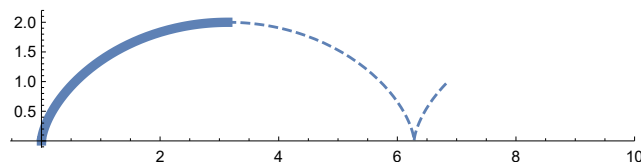
- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1	אינטגרל קווי (המשך)
2	1.1	משפט ג'ורדן ווקטור משיק
6	1.2	אינטגרל קווי מסוג ראשון
9	1.3	אינטגרל קווי מסוג שני



תזכורות



איור 1: המשוואה למעשה מתארת את החלק המודגש בלבד. החלק המקווקו הוא ההמשך הטבעי של העקום ע"י שיקוף וכו'.

פרמטריזציה של ציקלואידה:

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (1)$$

1 | אינטגרל קווי (המשך)

1.1 משפט ג'ורדן ווקטור משיק

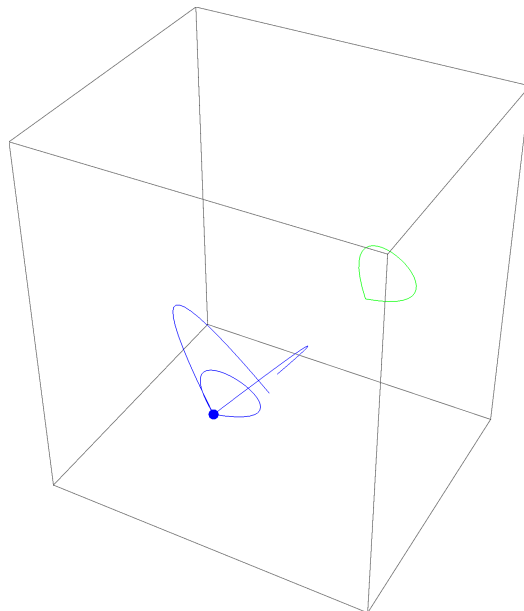
הערות, סוגי עקומים, משפט ג'ורדן

1. לעיתים קרובות נסמן את רכיבי העקום $f(t), g(t), h(t)$ בסימון $x(t), y(t), z(t)$ (כמו בדוגמה עם הזבוב המעוך).
2. חשוב להפריד בין העקום הפרמטרי $\gamma(t)$ שהוא פונקציה, לבין התמונה שלו במרחב/מישור שהוא קבוצה (זו הקבוצה שאנחנו מציירים). נסמן את תמונת $\gamma(t)$ בד"כ על ידי Γ .
- ל- Γ נתון יש הרבה $\gamma(t)$ שונים ש"מפיקים" אותו. כלומר, לעקום נתון יש **פרמטריזציות** שונות. נאמר ש- Γ רציף/פשוט וכו' אם יש פרמטריזציה $\gamma(t)$ בעל התכונה הרצויה.
- אפשר לחשוב על פרמטריזציות שונות כאל חלקיקים הנעים על אותו מסלול אבל בקצב שונה, או במהירות שונה.
3. בהינתן פרמטריזציה, נקבעת **מגמה** (כיוון התקדמות לאורך העקום). זה לעיתים יהיה חשוב.

הגדרה: יהי $t \in I$, $\gamma(t)$ עקום.

1. העקום נקרא **רציף** אם הפונקציות $f(t), g(t), h(t)$ רציפות בקטע I .
2. העקום נקרא **גזיר** (ברציפות) אם הפונקציות $f(t), g(t), h(t)$ גזירות (ברציפות) בקטע I .

3. העקום נקרא סגור אם $I = [a, b]$ וכן $\gamma(a) = \gamma(b)$.
4. העקום נקרא פשוט אם לכל $s < t$ מתקיים $\gamma(s) \neq \gamma(t)$ פרט אולי למקרה $s = a, t = b$.
5. עקום רציף, סגור ופשוט נקרא עקום ג'ורדן.



איור 2: עקום סגור ופשוט, ועקום פתוח ולא פשוט.

כמובן, כנ"ל עבור עקומים במישור.

הערה: אין קשר בין המושג "עקום ג'ורדן" לבין המושג "קבוצת ג'ורדן".

המשפט הבא הוא משפט עמוק שההוכחה שלו מורכבת מכדי להביא אותה כאן, ומאוד מעניינת. הוא נקרא משפט ג'ורדן.

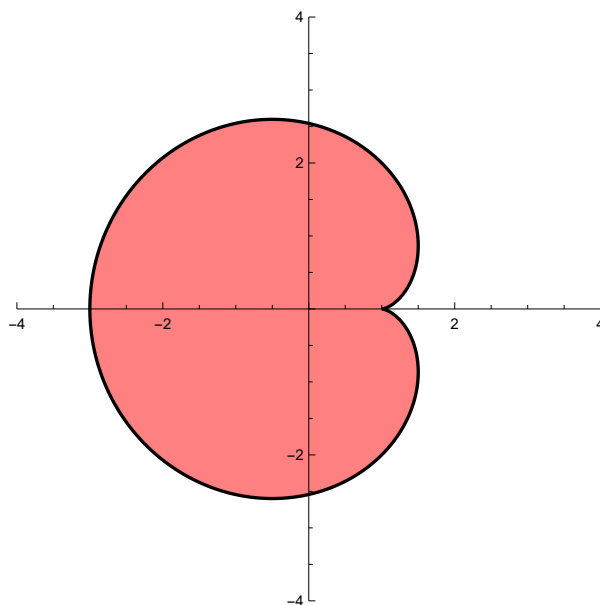
משפט 1: יהי $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ עקום רציף, סגור ופשוט. אז Γ מחלק את המישור לשני חלקים קשירים נפרדים: פנים וחוץ. הפנים יסומן $\text{int}(\Gamma)$.

הוקטור המשיק לעקום פרמטרי

נשים לב לתופעה הבאה: בציקלואידה באיור 1 ישנם "שפיצים" למרות שהפרמטריזציה (1) שמצאנו שלה היא גזירה. איך זה מסתדר עם כלל האצבע שפונקציה $f(x)$ היא גזירה אם בגרף שלה אין שפיצים?

ראשית נציין שהפרמטריזציה היא גזירה ולא פונקציה שהעקום הוא הגרף שלה, ולכן אין סתירה ישירה. בכל זאת, ננסה ליישב את האינטואיציה. מושג שיעזור לנו והוא חשוב בכל מקרה הוא הוקטור המשיק לעקום בנקודה נתונה.

יהי $\gamma(t)$ עקום פרמטרי. לכל s, t , המיתר שמחבר בין הנקודות על העקום בזמנים s ו- t הוא $\vec{\gamma}(t) - \vec{\gamma}(s)$ (ראו איור 4). ככל ש- t מתקרב ל- s , הכיוון של המיתר מתקרב למה שאמור להיות כיוון המשיק - אך גודל המיתר שואף לאפס. ננרמל חלקית על ידי חלוקה ב- $(t - s)$ ונקבל את הגדרת הוקטור המשיק.



איור 3: הפנים של עקום אשר נקרא קרדיואיד.

הגדרה: הוקטור המשיק בזמן t בנקודה $\gamma(t)$ (אם הוא קיים) הוא

$$\vec{\gamma}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)}{\Delta t}$$

משפט 2: הוקטור המשיק קיים בנקודה t אם ורק אם העקום γ גזיר, ואז

$$\vec{\gamma}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

הערות:

- הגודל של הוקטור המשיק בנקודה נתונה תלוי בפרמטריזציה ויכול להיות שונה מהגודל בנקודות אחרות.
- הכיוון של הוקטור המשיק בנקודה נתונה אינו תלוי בפרמטריזציה (עד כדי היפוך). גם הוא יכול להיות שונה מאשר בנקודות אחרות.

דוגמאות עבור וקטור משיק ועקום חלק

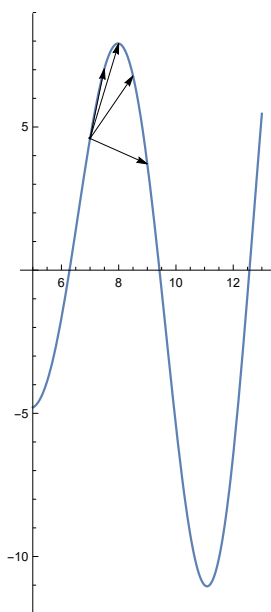
דוגמאות:

1. המעגל ברדיוס R שמרכזו בראשית:

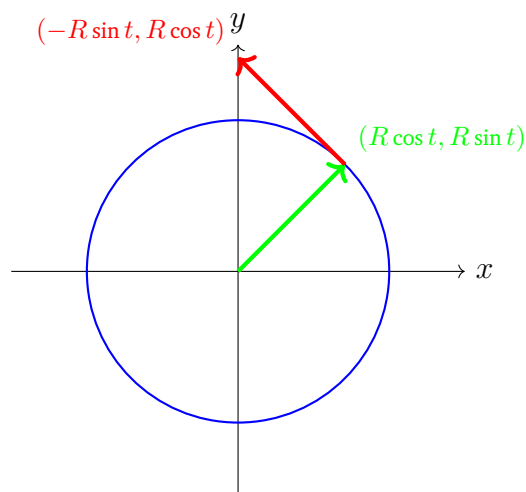
$$\begin{cases} x(t) = R \cos t \\ y(t) = R \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

בפרמטריזציה הזאת,

$$\vec{\gamma}'(t) = (-R \sin t, R \cos t)$$



איור 4: מספר מיתרים בין נקודה קבועה לנקודות שהולכות ומתקרבות אליה.



נשים לב שבמקרה, $|\vec{\gamma}'(t)| \equiv R$.

2. בציקלואידה,

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$$

לכן זהו עקום גזיר עם וקטור משיק

$$\vec{\gamma}'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$$

כפי שראינו, בכל זאת יש שפיץ עבור $t = 2\pi$. נשים לב שאז הוקטור המשיק הוא $(0, 0)$.

כדי להבטיח שאין בעקום שפיצים, צריך למשל לוודא שסביב כל נקודה מדובר בגרף של פונקציה. משפט הפונקציות הסתומות מספיק לצורך זה, בתנאי שאחת מהנגזרות לא מתאפסת.

הגדרה: נאמר שהעקום $\gamma(t)$ חלק בנקודה t_0 אם הוא גזיר בנקודה וכן $\gamma'(t_0) \neq 0$.

עקום נקרא חלק אם הוא חלק בכל נקודה.

חלקות היא התנאי הנכון לאי-קיום שפיצים בעקום. זהו לא תנאי שקול (יתכן עקום שיש לו פרמטריזציה חלקה וגם פרמטריזציה לא חלקה) אבל הוא מספיק.

הערה: עבור קו Γ נתון, ראינו שקיימות אינסוף פרמטריזציות. יתכן שחלקן חלקות וחלק לא חלקות. אם יש שפיץ, אז אין פרמטריזציה חלקה.

כלומר, אי קיום שפיץ אינו מבטיח שכל פרמטריזציה תהיה חלקה, אלא רק שיש כנראה פרמטריזציה חלקה.

1.2 אינטגרל קווי מסוג ראשון

מבוא לאינטגרל קווי

עד כה ראינו אינטגרלים חד-ממדיים, דו-ממדיים (כפולים) ותלת-ממדיים (משולשים). המשותף לכל אלו הוא שמבצעים בהם אינטגרציה ("סכימה רציפה") של פונקציה על תחום שהמימד שלו מתאים למספר המשתנים שהפונקציה תלויה בהם. כעת נכיר סוג חדש של אינטגרל שהוא גם חדש מבחינה תפיסתית מקודמיו: הקבוצה שעליה נבצע אינטגרציה תהיה עקום (כלומר, חד-ממדי) אבל האינטגרנד יהיה תלוי ביותר ממשתנה אחד. אפשר לחשוב על זה בתור כיוון אחר של הכללת האינטגרל במשתנה אחד.

יהי Γ עקום בעל פרמטריזציה

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad a \leq t \leq b$$

נניח לכל אורך הדיון ש- $\gamma(t)$ גזיר ברציפות (כלומר, $x(t), y(t), z(t)$ פונקציות של משתנה אחד שהן גזירות עם נגזרת רציפה). למעשה, בהמשך נאפשר גם גזירות ברציפות **למקוטעין**, מה שאומר ש- $\gamma(t)$ רציף בכל נקודה וגזיר ברציפות בכל נקודה פרט (אולי) למספר סופי של נקודות.

כפי שנראה, ישנם שני סוגים של אינטגרל קווי, שיש ביניהם קשר אך הם שונים ומייצגים דברים שונים.

הגדרה של אינטגרל קווי מסוג ראשון

נתונה $f(x, y, z)$ (או $f(x, y, z)$) שמוגדרת לפחות בכל נקודה על העקום, כלומר $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$.

נחשוב על $f(x, y, z)$ כעל צפיפות מסה ליחידת אורך כאשר העקום הוא תיל שעשוי מחומר (אולי) לא אחיד. ברצוננו לחשב את המסה הכוללת של התיל.

נעיר שאם $f(x, y, z) \equiv 1$ אז המסה של התיל שווה לאורכו. כלומר, במקרה זה החישוב יתן את אורך התיל.

מוטיבציה (לא הגדרה): נקרב את העקום על ידי **מסלול פוליגוני** ואז נתייחס לצפיפות כקבועה בכל מקטע.

1. נבחר חלוקה של $[a, b]$ (הקטע שבו נמצא הפרמטר), $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$.

2. לכל i , נשים קו ישר במרחב בין הנקודות $\gamma(t_{i-1})$ ו- $\gamma(t_i)$. זה יוצר מסלול שהוא "ישר למקוטעין" (זה נקראה פוליגוני) וקרוב ל- Γ (אבל לא מוכל בתוך Γ !).

3. האורך של החלק מתוך Γ בין הנקודות $\gamma(t_{i-1})$ ו- $\gamma(t_i)$ הוא בערך אורך הישר הנ"ל ("אורך הקשת שווה בערך לאורך המיתר). נקרב בקטע ה- i את הצפיפות על ידי $f(\gamma(c_i))$, כאשר $t_{i-1} \leq c_i \leq t_i$ נקודת ביניים כלשהי.

אם כך, המסה של התיל שווה בקירוב לסכום הבא:

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{f(x(c_i), y(c_i), z(c_i))}_{\text{קירוב הצפיפות על ידי קבוע במקטע ה-}i} \underbrace{|\gamma(t_{i-1}) - \gamma(t_i)|}_{\text{אורך המקטע ה-}i} = \sum_{i=1}^n f(x(c_i), y(c_i), z(c_i)) \frac{|\gamma(t_{i-1}) - \gamma(t_i)|}{\Delta t_i} \cdot \Delta t_i$$

זה מוביל אותנו להגדרה הבאה.

הגדרה 3. יהי Γ עקום עם פרמטריזציה גזירה $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$. תהי $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ האינטגרל הקווי מהסוג הראשון של $f(x, y, z)$ לאורך Γ מוגדר על ידי הביטוי הבא, אם הוא קיים:

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$$

בכתיבה מלאה בדי מימד,

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

באופן דומה, בתלת מימד,

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

במקרה של פונקציה בשני משתנים $f(x, y)$ אשר מוגדרת על עקום במישור, אפשר לחשוב על האינטגרל הקווי מהסוג הראשון גם כשטח פני הוילון שבין העקום Γ לבין ה"גרף" של f מעל / מתחת ל- Γ .

הערות לגבי ההגדרה, אורך של עקום

1. אם הפרמטריזציה גזירה ברציפות והפונקציה f רציפה, אז האינטגרל הקווי מהסוג הראשון מוגדר. ברוב הדוגמאות, זה יהיה המצב.

אחרת, כל מקרה לגופו.

2. הביטוי ds מכונה **אלמנט אורך סקלרי**. הוא מסומן לעיתים גם $d\ell$.

זהו ביטוי חסר משמעות מתמטית, אבל מסייע אינטואיטיבית. הוא "מבטא" את מידת העיוות של אורכים בין קטע הפרמטר לבין העקום Γ .

אפשר לחשוב עליו כאל $ds = |\vec{\gamma}'(t)| dt$.

3. אם המסלול Γ סגור, נשתמש בסימון $\oint_{\Gamma} f(x, y, z) ds$ (זו בסך הכל "תזכורת" לכך שהמסלול סגור).

הגדרה: יהי Γ עקום עם פרמטריזציה גזירה $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$. **האורך של העקום** Γ מוגדר על ידי $\ell(\Gamma) = \int_{\Gamma} 1 ds$, אם האינטגרל קיים.

כלומר,

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}'(t)| dt$$

הערה: האורך $\ell(\Gamma)$ לוקח בחשבון כמות ליפופים. למשל, אם ניקח פרמטריזציה אשר מכסה את מעגל היחידה פעמיים, נקבל אורך 4π .

דוגמאות של אינטגרל קווי מסוג ראשון

דוגמאות:

1. נחשב את אורכה של הציקלואידה (ליתר דיוק, של המחזור הראשון שלה). מצאנו בעבר את הפרמטריזציה:

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

לכן

$$\begin{aligned} \ell(\Gamma) &:= \int_{\Gamma} 1 ds = \int_0^{2\pi} 1 \cdot \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} 2 \sqrt{\sin^2 \left(\frac{t}{2}\right)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \sin \left(\frac{t}{2}\right) dt = 8 \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בכך ש- $\sin \left(\frac{t}{2}\right) \geq 0$ לכל $0 \leq t \leq 2\pi$.

2. נתון תיל מעגלי ברדיוס R עם צפיפות מסה אורכית

$$f(x, y) = \frac{|x| + |y|}{R}$$

מהי המסה הכוללת של התיל?

שלב ראשון הוא תמיד למצוא פרמטריזציה. במקרה הזה,

$$\begin{cases} x(t) = R \cos t \\ y(t) = R \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

לכן המסה היא

$$\begin{aligned} \int_{x^2+y^2=R^2} \frac{|x| + |y|}{R} ds &= \int_0^{2\pi} \frac{|R \cos t| + |R \sin t|}{R} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt \\ &= R \int_0^{2\pi} (|\cos t| + |\sin t|) dt \end{aligned}$$

נחשב

$$\int_0^{2\pi} |\sin t| dt = \int_0^{\pi} \sin t dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin t) dt = -\cos t \Big|_0^{\pi} + \cos t \Big|_{\pi}^{2\pi} = 1 - (-1) + 1 - (-1) = 4$$

באופן דומה (או מטעמי סימטריה), גם $\int_0^{2\pi} |\cos t| dt = 4$ ולכן בסך הכל המסה היא $8R$.

תכונות של אינטגרל קווי מסוג ראשון

משפט 4:

1. לכל שתי פרמטריזציות גזירות ברציפות $\gamma(t)$ ו- $\tilde{\gamma}(t)$ של אותו עקום Γ (לא משנה אם באותה מגמה), ולכל פונקציה רציפה על העקום, מתקיים כי

$$\int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\tilde{\gamma}(t)) |\tilde{\gamma}'(t)| dt$$

2. אם Γ_1 ו- Γ_2 גזירים ברציפות ו- $\ell(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = 0$ (לחיתוך שלהם יש אורך אפס), אז

$$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} f ds = \int_{\Gamma_1} f ds + \int_{\Gamma_2} f ds$$

הערות:

- סעיף 1 בעצם אומר שהאינטגרל הקווי מהסוג הראשון מוגדר היטב.
- בפרט אנו רואים שאין חשיבות לכיוון ש- $\gamma(t)$ מגדיר; תוצאת האינטגרל תהיה אותה תוצאה.
- סעיף 2 מכונה **אדיטיביות** (ביחס לתחום).
- לפי אדיטיביות, אנו רואים שהאינטגרל הקווי מסוג ראשון מוגדר היטב על עקומים שהם גזירים ברציפות למקוטעין - על ידי סכום האינטגרלים על החלקים הגזירים למקוטעין.
- סעיף 2 ניתן להכללה לשני עקומים כלשהם, כלומר ללא הנחה שלחיתוך שלהם יש אורך אפס. במקרה כזה מקבלים נוסחה בסגנון **הכלה והפרדה**:

$$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} f ds = \int_{\Gamma_1} f ds + \int_{\Gamma_2} f ds - \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} f ds$$

נתייחס להוכחת המשפט כאשר נדבר על אינטגרל קווי מסוג שני, שם יהיה משפט דומה אך עם שינוי מהותי אחד: תהיה חשיבות לכיוון התנועה על העקום.

למרות שכל הדיון תקף לדו-מימד וכן לתלת-מימד באופן דומה, יש משמעות נוספת לאינטגרל הקווי מסוג ראשון במקרה הדו-ממדי: אם נצייר את העקום על מישור xy במרחב ונצייר יריעה ("וילון") מעל העקום כך שמעל הנקודה $\gamma(t)$, גובה הוילון הוא $f(\gamma(t))$, אז האינטגרל הקווי מסוג ראשון שווה לשטח הפנים של הוילון.

1.3 אינטגרל קווי מסוג שני

שדה וקטורי

הגדרה: שדה וקטורי הוא פונקציה $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, כאשר $D \subset \mathbb{R}^n$.

כלומר, זו פונקציה בין שני מרחבים בעלי אותו מימד. במקרה הדו ממדי, אפשר לכתוב

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y) \hat{i} + Q(x, y) \hat{j}$$

באופן דומה, במקרה התלת ממדי,

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \hat{i} + Q(x, y, z) \hat{j} + R(x, y, z) \hat{k}$$

זהו וקטור בכל נקודה, שכדאי לחשוב עליו בתור הכוח שיפעל על גוף נתון אם יוצב בנקודה.

דוגמאות:

1. "שדה כבידה" (קירוב גס - קבוע, מכוון למטה, גודלו שווה למשקל הגוף):

$$\vec{F}(x, y, z) = -W \hat{k}$$

2. שדה כבידה (יותר מדויק - החוק של ניוטון):

$$\begin{aligned} \vec{F}(x, y, z) &= -\frac{1}{r^2} \hat{r} = -\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i} - \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{j} - \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{k} \end{aligned}$$

הגדרה של אינטגרל קווי מסוג שני

נניח שחלקיק נע לאורך עקום Γ באזור שבו פועל כוח מסוים (ואולי כוחות אחרים) אשר מתואר על ידי שדה וקטורי. מהו השינוי באנרגיה של החלקיק כתוצאה מפעולת הכוח?

העיקרון הפיסיקלי הוא שהעבודה (שינוי באנרגיה) שווה לכוח כפול דרך, כאשר רק המרכיב של הכוח בכיוון המקביל (המשיק) לדרך תורם.

כלומר, אם נסתכל על קטע זמן קטן $[t, t + \Delta t]$, העבודה לאורך המיתר המתאים על העקום שווה בערך ל-

$$\left(\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \frac{\vec{\gamma}'(t)}{|\vec{\gamma}'(t)|} \right) |\gamma(t) - \gamma(t + \Delta t)|$$

הסבר: הביטוי בסוגריים שווה להיטל של הכוח על כיוון התנועה הרגעי (=מהירות=וקטור משיק). הביטוי השני שווה בערך לדרך שהחלקיק עבר בחלון הזמן הקטן הנ"ל.

ראינו ביטוי כנ"ל במוטיבציה להגדרת אינטגרל קווי מסוג ראשון, כאשר במקום הביטוי בסוגריים הייתה לנו פונקציה סקלרית $f(x, y, z)$. לפי ההגיון ההוא, העבודה אמורה להיות שווה לאינטגרל הקווי מהסוג הראשון:

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \frac{\vec{\gamma}'}{|\vec{\gamma}'|} ds = \int_a^b \left(\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \frac{\vec{\gamma}'(t)}{|\vec{\gamma}'(t)|} \right) |\vec{\gamma}'(t)| dt = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt$$

לביטוי האחרון יש "אופי" משלו, והוא מוביל להגדרה הבאה.

הגדרה 5. יהי Γ עקום עם פרמטריזציה גזירה $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, ויהי $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$ שדה וקטורי שמוגדר לפחות על Γ . אינטגרל העבודה (או האינטגרל הקווי מהסוג השני) של $\vec{F}$ לאורך Γ מוגדר (אם הוא קיים) על ידי

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} \equiv \int_{\Gamma} \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{s} = \int_a^b \left(\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) \right) dt$$

הביטוי $d\vec{s} = \vec{\gamma}'(t) dt$ אפשר לחשוב עליו כ-**אלמנט אורך וקטורי**. אפסר לחשוב עליו כ- $d\vec{s} = \vec{\gamma}'(t) dt$ בודו מימד, ההגדרה היא לכן

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \underbrace{\int_a^b P(x(t), y(t)) x'(t) dt}_{=:\int_{\Gamma} P dx} + \underbrace{\int_a^b Q(x(t), y(t)) y'(t) dt}_{=:\int_{\Gamma} Q dy}$$

לכן גם כותבים

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\Gamma} (Pdx + Qdy)$$

באופן דומה, בתלת מימד,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \underbrace{\int_a^b P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt}_{=:\int_{\Gamma} P dx} + \underbrace{\int_a^b Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt}_{=:\int_{\Gamma} Q dy} \\ &\quad + \underbrace{\int_a^b R(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt}_{=:\int_{\Gamma} R dz} \end{aligned}$$

במקרה זה, כותבים גם

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\Gamma} (Pdx + Qdy + Rdz)$$

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:
1. כוחות משמרים במכניקה.

“ The kind of knowledge which is supported only by observations and is not yet proved must be carefully distinguished from the truth; it is gained by induction, as we usually say. Yet we have seen cases in which mere induction led to error.

”

Leonhard Euler