

הרצאה 19: החלפת משתנים באינטגרל משולש, עקומים פרמטרים

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1 אינטגרל משולש (המשך)
2	1.1 החלפת משתנים באינטגרל משולש
6	2 אינטגרל קווי
6	2.1 עקומים פרמטריים



1 | אינטגרל משולש המשר

1.1 החלפת משתנים באינטגרל משולש

אינטואיציה ונוסחה

בדומה לאינטגרל כפול ובלי הרבה פוליטיקה בינתיים, עבור החלפת משתנים מהסוג $(x, y, z) = T(u, v, w)$, כלומר

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

תהיה לנו נוסחה כזו:

(1)

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_E f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \, du \, dv \, dw$$

כאשר, כמו באינטגרל כפול:

- E היא התחום V במרחב uvw .
- הביטוי $\left| \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right|$ מבטא את מידת המתיחה או הכיווץ המקומי של החלפת המשתנים. נזכיר כי מטריצת יעקובי היא

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

הדטרמיננט שלה נקרא היעקוביאן של הטרנספורמציה,

$$J_T(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

יש לחשוב על J_T כפקטור "עיוות" של הנפח.

קואורדינטות כדוריות

מסמנים ב- r את המרחק מהראשית, ב- φ את הזווית ביחס לציר ה- z וב- θ את זווית הסיבוב בתוך המעגל בגובה של הנקודה עם רדיוס מתאים (לא r אלא $r \sin \varphi$, המרחק לציר ה- z).

ראשית, לפי היטל על ציר z , $z = r \cos \varphi$.

באופן דומה, אורך ההיטל על מישור xy הוא $r \sin \varphi$. נוכל כעת להטיל אורך זה על שני הצירים ולקבל

בסך הכל

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \quad (2)$$

אם $0 \leq \varphi \leq \pi$ ו- $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $r \geq 0$ נקבל את כל המרחב, ובהתאם לתחום בכל פעם נקבל גבולות מתאימים אחרים.

דוגמאות:

1. עבור כדור, $0 \leq r \leq R$ (והיתר כנ"ל).
2. עבור שכבה בין שני כדורים, $a \leq r \leq b$ (והיתר כנ"ל).
3. עבור "גזרה" תלת ממדית, $0 \leq r \leq R$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ו- $\gamma \leq \varphi \leq \delta$.
4. החצי העליון של כדור ברדיוס 3 מתואר על ידי $0 \leq r \leq 3$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

משפט 1: היעקוביאן של קואורדינטות כדוריות (2) הוא $J(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \varphi$.

דוגמה: נחשב שוב נפח של כדור:

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^R r^2 \sin \varphi dr = \frac{R^3}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \frac{4\pi R^3}{3}$$

הכללות:

1. ניתן לבצע הזזה של נקודת הייחוס (כרגע זה הראשית), וניתן למתוח את הצירים בפרופורציות שאינן בהכרח שוות. בסך הכל,

$$\begin{cases} x = x_0 + ar \cos \theta \sin \varphi \\ y = y_0 + br \sin \theta \sin \varphi \\ z = z_0 + cr \cos \varphi \end{cases}$$

היעקוביאן במקרה זה הוא $|J| = abc r^2 \sin \varphi$.

2. אפשר לשנות את תפקידי הצירים במידת הצורך.

קואורדינטות גליליות

הפעם שומרים את המשתנה z כמשתנה (זהו הגובה), ומשתמשים בקואורדינטות פולריות (דו-ממדיות) עבור ההיטל של הנקודה (x, y, z) על מישור xy , שהיא הנקודה $(x, y, 0)$. זה נראה כך:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (3)$$

כאשר $0 \leq \theta < 2\pi$, $r \geq 0$ ו- $z \in \mathbb{R}$, נקבל את כל המרחב, ובהתאם לתחום בכל פעם נקבל גבולות מתאימים אחרים.

משפט 2: היעקוביאן של קואורדינטות גליליות (3) הוא $J(r, \theta, z) = r$.

דוגמה: נפח של גליל בגובה h עם רדיוס בסיס R :

$$V = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r \, dr \, d\theta \, dz = \pi R^2 h$$

ניסוח המשפט על החלפת משתנים באינטגרל כפול

משפט 3: יהיו $V, E \subset \mathbb{R}^3$ תחומי ג'ורדן, ותהי

$$T(u, v, w) = \begin{pmatrix} x(u, v, w) \\ y(u, v, w) \\ z(u, v, w) \end{pmatrix}$$

טרנספורמציה שמקימת את התנאים הבאים:

$$1. \quad T(\bar{E}) = \bar{V}$$

2. ההעתקה T גזירה ברציפות ב- $\bar{E}$ (כלומר, $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$ ו- $z(u, v, w)$ בעלות נגזרות חלקיות רציפות בכל $\bar{E}$), ובנוסף כל הנגזרות החלקיות רציפות ליפשיץ ב- $\bar{E}$.

3. ההעתקה T חד-חד-ערכית ב- E .

4. לכל $(u, v, w) \in E$ מתקיים $J_T(u, v, w) \neq 0$.

אז לכל $f(x, y, z)$ אינטגרלית ב- $\bar{V}$ מתקיים ש-

$$\iiint_{\bar{V}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\bar{E}} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J_T(u, v, w)| \, du \, dv \, dw$$

(והאינטגרנד באגף ימין אינטגרלית ב- $\bar{E}$).

אותן הערות תקפות כמו בהחלפת משתנים עבור אינטגרל כפול.

ניסוח לא מדויק של המשפט על החלפת משתנים באינטגרל משולש

ניתן להשתמש בנוסחה של החלפת משתנים באינטגרל משולש (1) כאשר מתקיימים התנאים הבאים.

1. T חד-חד-ערכית ועל בין E לבין V .

2. ההעתקה T גזירה ברציפות ב- E .

3. לכל $(u, v, w) \in E$ מתקיים $J_T(u, v, w) \neq 0$.

זהו לא ניסוח מדויק של המשפט, אלא רשימה פשוטה של התנאים העקרוניים הנחוצים כדי להשתמש בו. הניסוח המדויק קצת יותר מסורבל.

נעיר לבסוף שאם התנאים מתקיימים פרט לתת קבוצה שנפחה 0, עדיין אפשר להשתמש בנוסחה.

אותן הערות תקפות כמו בהחלפת משתנים עבור אינטגרל כפול.

דוגמה להחלפת משתנים מבושלת ויעקוביאן הפוך

דוגמה: נחשב את הנפח של התחום

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (2x + y + z)^2 + (x + 2y + z)^2 + (x + y + 2z)^2 \leq 1\}$$

זהו תחום מסובך להבנה, אבל יש החלפת משתנים מתבקשת שתהפוך את התחום V לתחום E (במשתנים החדשים) שהוא פשוט ומוכר:

$$\begin{cases} u = 2x + y + z \\ v = x + 2y + z \\ w = x + y + 2z \end{cases}, \quad (x, y, z) \in V$$

אכן, נקבל $E = \{u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\}$ - כדור היחידה.

הבעיה: במשפט, החלפת המשתנים נתונה הפוך (מ- E ל- V). כפי שאנו רואים בדוגמה הזו, לעיתים קרובות דווקא יותר טבעי להגדיר מ- V ל- E .

מה עושים? על פניו, הופכים את ההעתקה ומשתמשים במשפט. אבל, בדומה להחלפת משתנים באינטגרל כפול וכפי שהמשפט הבא יבטיח, מספיק לבדוק את התנאים על ההעתקה שהגדרנו בלי להפוך אותה, וכן ניתן לחשב את היעקוביאן ללא היפוך ההעתקה. נדגים: ההעתקה שהגדרנו היא לינארית ומיד נראה שהיא הפיכה. ברור שהיא גזירה ברציפות. נחשב את היעקוביאן שלה (זה לא היעקוביאן הנכון במשפט!):

$$\det \left(\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \right) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

זהו גם הדטרמיננט של מטריצה המייצגת את ההעתקה ולכן ההעתקה הפיכה. המשפט יגיד לנו שאז:

$$J(u, v, w) = \det \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right) = \frac{1}{\det \left(\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \right)} = \frac{1}{4}$$

לסיכום,

$$|V| = \iiint_V dx \, dy \, dz = \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} \frac{1}{4} du \, dv \, dw = \frac{\pi}{3}$$

(כי האינטגרל של 1 על כדור היחידה שווה לנפח הכדור, $\frac{4\pi}{3}$).

הערה: בדוגמה, היעקוביאן יצא קבוע. אם לא, צריך בנוסף לעבור למשתנים u, v, w (לא להשאר עם (x, y, z)).

המשפט שהוזכר בדוגמה לעיל שמאפשר לעבוד עם החלפת משתנים הפוכה הוא המשפט הבא, בדומה להחלפת משתנים באינטגרל כפול, שהוא תוצאה של משפט הפונקציות הסתומות.

משפט 4: נניח שהטרנספורמציה

$$\begin{cases} u = u(x, y, z) \\ v = v(x, y, z) \\ w = w(x, y, z) \end{cases}, \quad (x, y, z) \in V$$

היא חח"ע ועל מ- V ל- E , בעלת נגזרות חלקיות רציפות ב- V ומקימת

$$\det \left(\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}(x, y, z) \right) \neq 0$$

לכל $(x, y, z) \in V$. אז הטרנספורמציה ההפוכה שלה (מ- E ל- V) מקיימת את תנאי המשפט על החלפת משתנים, ו-

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}(u, v, w) = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

בפרט (ברישום מקוצר ללא ציון המשתנים):

$$J = \frac{1}{\det \left(\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \right)}$$

2 | אינטגרל קווי

2.1 עקומים פרמטריים

דוגמאות מקדימות של עקומים

עקום (או עקומה, או מסלול) במישור/מרחב הוא "שרוך" חד-ממדי שמייצג, למשל, מסלול של חלקיק נקודתי במשך פרק זמן מסוים. נתחיל בשתי דוגמאות כלליות של עקומים במישור:

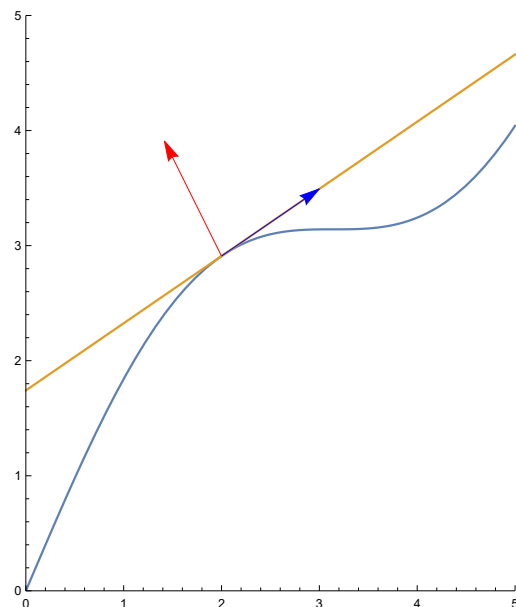
1. גרף של פונקציה של משתנה אחד: $y = f(x)$, $x \in [a, b]$. זה עקום במישור.

אם $f(x)$ גזירה, משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה x_0 (כלומר, בנקודת ההשקה $(x_0, f(x_0))$ על הגרף) היא

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

לכן כל וקטור כיוון של הישר הוא **וקטור משיק** לעקום. למשל, $\vec{u} = (1, f'(x_0))$.

הוקטור $(-1, f'(x_0))$ מאונך לוקטור המשיך ולכן הוא מאונך לעקום. זה נקרא **וקטור נורמל** לעקום.



איור 1: הגרף $y = x + \sin x$ עבור $x \in [0, 5]$, הישר המשיק, וקטור משיק וקטור נורמל בנקודה $x = 2$.

2. קו גובה של פונקציה בשני משתנים: $f(x, y) = C$ הוא בד"כ עקום.

למשל, אם $f(x, y) = x^2 + y^2$ אז קווי הגובה $x^2 + y^2 = C$ הם מעגלים עבור $C > 0$, נקודה בודדת (שזה לא עקום/עקום מנוון) עבור $C = 0$ וריקים (לא עקום) עבור $C < 0$.

לפי משפט, אם $f(x, y)$ פונקציה גזירה אז לכל (x_0, y_0) מתקיים שהגרדיאנט

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

הוא וקטור נורמל לקו הגובה המתאים בנקודה (x_0, y_0) (זהו הקו שמתאים ל- $C = f(x_0, y_0)$).

לכן $(-f_y(x_0, y_0), f_x(x_0, y_0))$, שמאונך ל- $\vec{\nabla} f$, הוא וקטור משיק לקו הגובה המתאים בנקודה (x_0, y_0) .

הערה: אם $y = f(x)$ גרף של פונקציה של משתנה אחד, אז הוא מתואר על ידי המשוואה השקולה

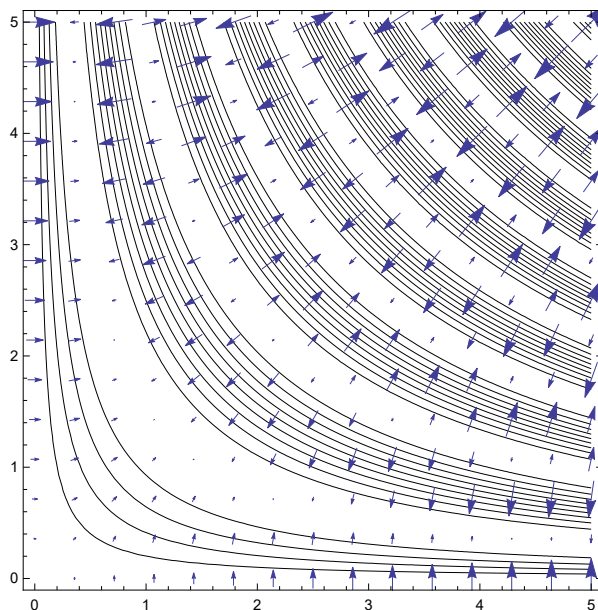
$$y - f(x) = 0$$

לכן אם נגדיר

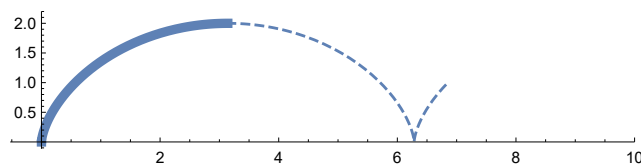
$$F(x, y) := y - f(x)$$

אז הגרף הוא קו גובה של $F(x, y)$ (עבור $C = 0$). כלומר, קו גובה הוא דוגמה כללית יותר לעקום מאשר גרף של פונקציה.

דוגמה: המשוואה $\arccos(1 - y) - \sqrt{y(2 - y)} - x = 0$ מתארת **ציקלואידה** (ראו איור 3).



איור 2: כמה קווי גובה של הפונקציה $f(x, y) = \sin(xy)$. הגרדיאנט מאונך לקווי הגובה בכל נקודה.



איור 3: המשוואה למעשה מתארת את החלק המודגש בלבד. החלק המקווקו הוא ההמשך הטבעי של העקום ע"י שיקוף וכו'.

הגדרה של עקום

ראינו גם דוגמה לעקום במרחב: קו ישר. זהו עקום שאין לו עקמומיות, אבל הוא בכל זאת דוגמה לעקום/מסלול. נזכיר את התיאור הפרמטרי של ישר במרחב:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

כפי שראינו כאשר דיברנו על קשירות מסילתית, ההגדרה שלנו לעקום מבוססת על התיאור הפרמטרי של ישר. החלפנו את הפונקציות **האפניות** (לינאריות + קבוע) בפונקציות כלליות. נעיר שלעיתים נגביל את t לקטע שאינו כל $\mathbb{R}$.

הגדרה: עקום (פרמטרי) הוא פונקציה $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ כאשר $I \subset \mathbb{R}$ קטע.

כלומר, עקום ניתן לתיאור על ידי:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}, \quad t \in I$$

כאשר $\gamma(t) = (f(t), g(t), h(t))$ (הרכיבים של $\gamma(t)$).
כדאי לחשוב על $\gamma(t)$ כאל מיקום של חלקיק במרחב (או במישור) בזמן t .

הערות:

- אם זה עקום במישור, זה יהיה $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$.
- אפשר להחליף את הקטע הסגור בקטע פתוח, חצי-פתוח, בכל $\mathbb{R}$ וכו'.

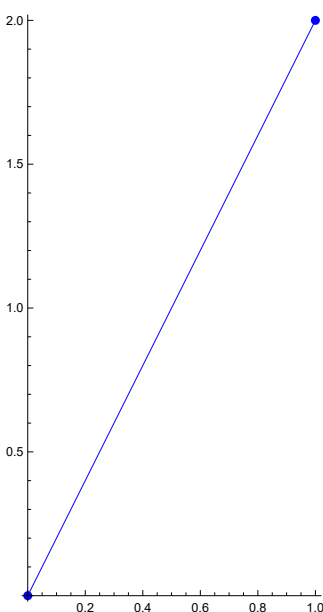
דוגמאות של עקומים פרמטריים

דוגמאות:

1. העקום

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}, \quad t \in [0, 1]$$

הוא חלק מישור (ראו איור 4). זה נקרא **קטע**.



איור 4: הקטע בין הנקודות $(0,0)$ ו- $(1,2)$.

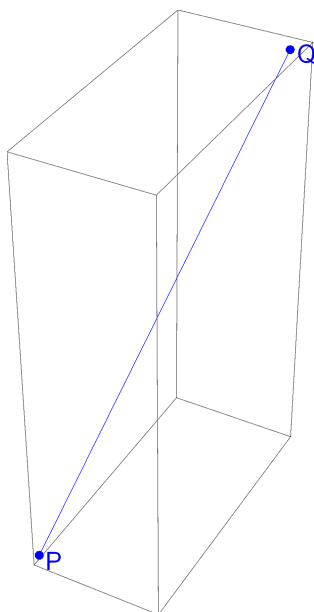
2. באופן כללי יותר, בהנתן שתי נקודות $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, **הקטע שמחבר ביניהם** הוא החלק מהישר שעובר דרך P ו- Q שנמצא בין הנקודות:

$$\gamma(t) = P + t\vec{PQ} = tQ + (1-t)P, \quad t \in [0, 1]$$

כלומר:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \quad t \in [0, 1]$$

טווח הזמן נבחר כך מכיוון שעבור $t=0$ מתקבלת הנקודה P ועבור $t=1$ מתקבלת הנקודה Q . לכן הקטע ביניהם מתאים ל- $0 \leq t \leq 1$. ראו איור 5.



איור 5: קטע בין שתי נקודות במרחב.

3. חלק מהמעגל $x^2 + y^2 = 1$ בין הזוויות $\frac{\pi}{6}$ ו- $\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$$

אכן, זה ברור שלכל t מתקיים ש- $\gamma(t)$ על המעגל (הפרמטריזציה מקיימת את משוואת המעגל). דאגנו לחלק המבוקש מהמעגל באמצעות בחירת התחום הנכון של הפרמטר.

4. תיאור פרמטרי של מעגל היחידה:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

נשים לב שהחלקיק נע על המעגל $x^2 + y^2 = 1$ נגד כיוון השעון, החל מהנקודה $(1, 0)$ בזמן $t = 0$ וחזרה אליה בזמן $t = 2\pi$.

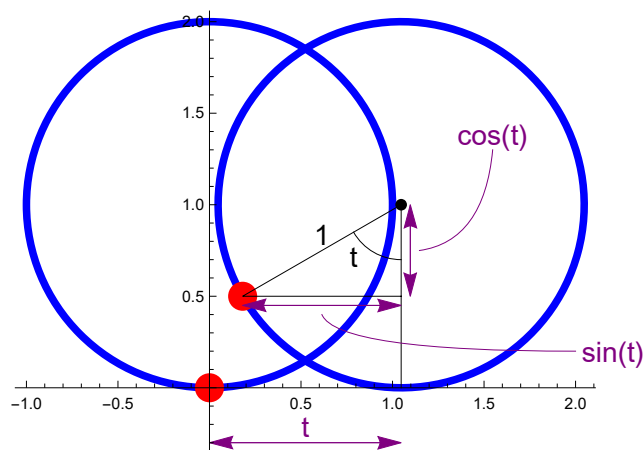
באופן דומה,

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

מתאר מעגל ברדיוס R .

נעיר שאפשר להגביל את t ולקבל רק חלק מהמעגל.

5. אם העקום מתואר בצורה פסיקלית, ניתן לבנות פרמטריזציה מתוך התיאור. למשל, זבוב מעוף על גלגל שמסתובב ללא החלקה. נבחר בזווית שמסומנת באיור 6 בתור הפרמטר, ונניח לצורך פשטות שרדיוס הגלגל הוא 1. כפי



איור 6: זבוב (הנקודה האדומה) מעוך על גלגל בתחילת התנועה ולאחר זמן מה. המסלול שהזבוב עבר (לו) אנו מחפשים פרמטריזציה) הוא המסלול המקווקו האדום.

שרואים בציור, אם הזווית היא t אז מרכז הגלגל (שנמצא תמיד בגובה 1) נמצא במרחק אופקי של t מהראשית ולכן:

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (4)$$

(אפשר להמשיך גם ל- $t > 2\pi$ אם הגלגל עושה יותר מסיבוב אחד).

ניתן לעבור מייצוג פרמטרי לייצוג על ידי משוואה (כלומר, למצוא משוואת עקום מתוך הייצוג הפרמטרי) על ידי חילוק של t מאחת המשוואות והצבתו למשוואה השנייה. נסו לעשות זאת בדוגמה זו. לאחר פישוט נקבל את משוואת הציקלואידה.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:
1. משמעות של הנגזרת $f'(x)$ בתור מהירות.

“ If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.

”

John von Neumann