

הרצאה 18: אינטגרל משולש

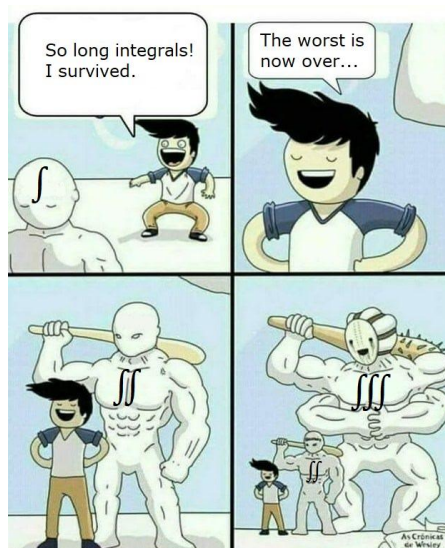
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1 אינטגרל משולש
2	1.1 אינטגרל משולש בתיבה
6	1.2 אינטגרל משולש בקבוצת ג'ורדן



אינטגרל משולש | 1

1.1 אינטגרל משולש בתיבה

חלוקות, סכומי רימן, אינטגרל רימן

האינטגרל כפול $\iint_D f(x, y) dx dy$ הוגדר כדי לחשב נפחים.

בבואנו לדון באינטגרל משולש $\iiint_V g(x, y, z) dx dy dz$, לא ניתן לצייר ציור אנלוגי.

נשתמש במוטיבציה אחרת. נחשוב על $g(x, y, z)$ כצפיפות מסה / מטען נפחית, ואז $\iiint_V g(x, y, z) dx dy dz$ שווה למסה הכוללת / כמטען הכולל של הגוף V .

פירוש זה של האינטגרל תקף גם עבור אינטגרל כפול. כלומר, אפשר לחשב מסה של פלטה D בעלת צפיפות מסה שטחית נתונה. באופן כללי, כדאי להתרגל לזהות סכומי רימן ולהתאים אותם לאינטגרל מהסוג המתאים.

הגדרה: תהי $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ תיבה. חלוקה של התיבה R היא שלשה של חלוקות (של כל אחד מהקטעים):

$$\begin{cases} P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} \\ P_2 = \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d\} \\ P_3 = \{e = z_0 < z_1 < \dots < z_l = f\} \end{cases}$$

פרמטר החלוקה מוגדר על ידי $\ell(P) = \max\{\ell(P_1), \ell(P_2), \ell(P_3)\}$ (כאשר $\ell(P_i)$ הם הפרמטרים של חלוקות חד-ממדיות).

זה נותן חלוקה של התיבה R לתתי תיבות על ידי

$$R_{i,j,k} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

ראו איור 1.

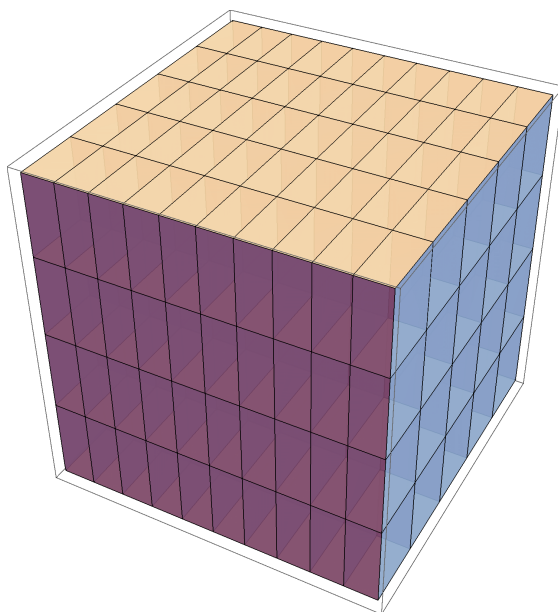
הגדרה: תהי $g(x, y, z)$ פונקציה אשר מוגדרת במלבן R . לכל בחירה של נקודות ביניים בחלוקות החד-ממדיות

$$\begin{cases} \tilde{x}_i \in [x_{i-1}, x_i] & i = 1, \dots, n \\ \tilde{y}_j \in [y_{j-1}, y_j] & j = 1, \dots, m \\ \tilde{z}_k \in [z_{k-1}, z_k] & k = 1, \dots, l \end{cases}$$

הסכום הבא מכונה סכום רימן:

האינדקסים רצים בהתאם למספר הנקודות בכל חלוקה: $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq l$.

אם למשל $g(x, y, z)$ היא צפיפה מסה נפחית, אז כל אחד מהמחברים מבטא קירוב של המסה של אותה תת תיבה. לכן סכום רימן הנו קירוב של המסה של התיבה כולה.



איור 1: חלוקה של תיבה לתתי-תיבות קטנות.

הערה: בחרנו את נקודות הביניים של סכום רימן באופן מסוים מאוד. כלומר, אי-אפשר לבחור סתם נקודה בכל תת-תיבה, אלא בוחרים נקודות ביניים חד-ממדיות ויוצרים מהן נקודות בתתי-התיבות. זה לא חשוב במיוחד, אבל זה קצת יותר פשוט בכתיבה. ראו איור 2 לתמונה של נקודות הביניים בתתי-התיבות.

הגדרה: תהי $g(x, y, z)$ מוגדרת בתיבה R . נאמר ש- g אינטגרלית (לפי רימן) בתיבה אם קיים מספר $I \in \mathbb{R}$ (שנקרא האינטגרל המשולש של g על R) כך שלכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ עבורו לכל חלוקה P שמקיימת $\ell(P) < \delta$, ולכל בחירה של נקודות ביניים בהתאם, מתקיים

$$\left| \sum_{i,j,k} g(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j, \tilde{z}_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k - I \right| < \epsilon$$

במקרה זה, האינטגרל משולש מסומן על ידי $I = \iiint_R g(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$.

תכונות של אינטגרל משולש בתיבה

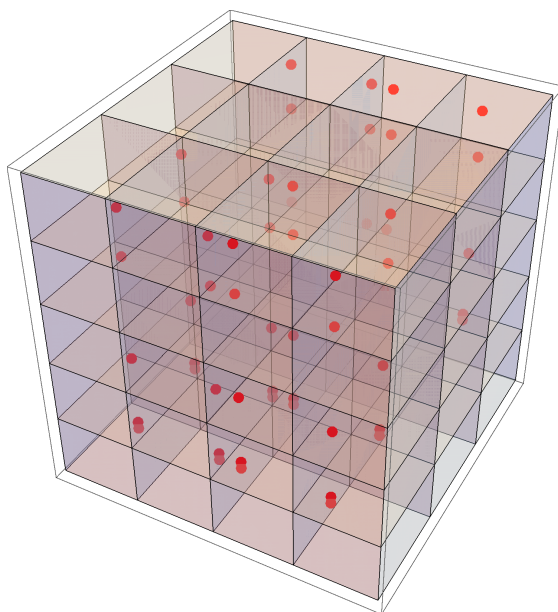
כל התכונות שנוסחו והוכחו עבור אינטגרל כפול (לינאריות, מונוטוניות וכו') נכונות גם עבור אינטגרל משולש בגרסה המתאימה. הוכחותיהן של התכונות הללו זהות או דומות מאוד.

משפט 1: תהי $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ תיבה.

1. אם g אינטגרלית ב- R אז היא חסומה ב- R .

2. לינאריות: אם $g(x, y, z)$ ו- $h(x, y, z)$ אינטגרליות בתיבה R , אז לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים ש- $\alpha f(x, y, z) + g(x, y, z)$ אינטגרלית ב- R ו-

$$\iiint_R (\alpha f + g) = \alpha \iiint_R f + \iiint_R g$$



איור 2: חלוקה של תיבה לתתי-תיבות, ונקודות הביניים בכל תת-תיבה שערך הפונקציה בה מהווה קירוב לצורך סכום רימן.

3. מונוטוניות: אם $g(x, y, z) \leq h(x, y, z)$ אינטגרביליות בתיבה R , אז $\iiint_R g \leq \iiint_R h$.

זה נכון גם עבור אי שוויון חזק $<$ בתנאי שהוא מתקיים בכל התיבה.

4. אינטגרביליות של הרכבה: אם $g(x, y, z)$ אינטגרבילית בתיבה R ו- $\alpha \leq g(x, y, z) \leq \beta$ לכל $(x, y, z) \in R$, ואם $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה, אז ההרכבה $\varphi(g(x, y, z))$ אינטגרבילית בתיבה R .

5. אינטגרביליות של חזקה טבעית: אם $g(x, y, z)$ אינטגרבילית בתיבה R , אז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים ש- $g(x, y, z)^n$ אינטגרבילית בתיבה R .

בנוסף, אם g חסומה מן האפס: $\inf_R |g| > 0$, אז $\frac{1}{g}$ אינטגרבילית בתיבה R .

6. אינטגרביליות של מכפלה: אם $g(x, y, z)$ ו- $h(x, y, z)$ אינטגרביליות בתיבה R , אז המכפלה gh אינטגרבילית בתיבה R .

7. אי-שוויון המשולש האינטגרלי: אם $g(x, y, z)$ אינטגרבילית בתיבה R , אז גם ערכה המוחלט $|g(x, y, z)|$ פונקציה אינטגרבילית בתיבה R . בנוסף,

$$\left| \iiint_R g(x, y, z) \, dx dy dz \right| \leq \iiint_R |g(x, y, z)| \, dx dy dz$$

8. משפט ההערכה: אם $g(x, y, z)$ אינטגרבילית בתיבה R , ולכל $(x, y, z) \in R$ מתקיים ש- $m \leq g(x, y, z) \leq M$, אז

$$m(b-a)(d-c)(f-e) \leq \iiint_R g(x, y, z) \, dx dy dz \leq M(b-a)(d-c)(f-e)$$

הקשר בין רציפות לבין אינטגרביליות

כמו עבור אינטגרל כפול ועם הוכחה דומה:

משפט 2: אם $g(x, y, z)$ רציפה בתיבה R אז היא אינטגרבילית בה.

הגדרה: קבוצה $A \subset \mathbb{R}^3$ היא ממידה אפס אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים כיסוי של A על ידי סדרת תיבות אשר סכום נפחיהן קטן מ- ε . כלומר, קיימת סדרת תיבות $R_1, R_2, \dots$ עבורם $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$ וכן

$$\sum_{k=1}^{\infty} |R_k| < \varepsilon$$

משפט 3: תהי g חסומה בתיבה R . אז g אינטגרבילית ב- R אם ורק אם קבוצת נקודות אי הרציפות של g היא ממידה אפס.

ניסוח משפט פוביני לאינטגרל משולש ודוגמאות

באופן דומה לאינטגרל כפול, ניתן לחשב אינטגרל משולש באמצעות אינטגרלים נשנים. בשונה מאינטגרל כפול, יש אפשרות לקבל אינטגרל נשנה שהוא דו-ממדי (כלומר, כפול). במילים אחרות, יש יותר דרכים לנסח את משפט פוביני מאשר במקרה של אינטגרל כפול.

בנוסף, ננסח אותו באופן טיפה אחר כדי לא להתעכב על העדינות שדיברנו עליה באינטגרל כפול, שיתכן כי בשלבים הראשונים לא תהיה אינטגרביליות בתת קבוצה ממידה אפס.

משפט 4: תהי $g(x, y, z)$ אינטגרבילית בתיבה R . אם האינטגרלים הנשנים בשוויונות הבאים קיימים כולם, אז השוויונות מתקיימים:
שיטת הקטעים: (ראו איור 3)

$$\iiint_R g = \iint_{[a,b] \times [c,d]} \left(\int_e^f g(x, y, z) dz \right) dx dy$$

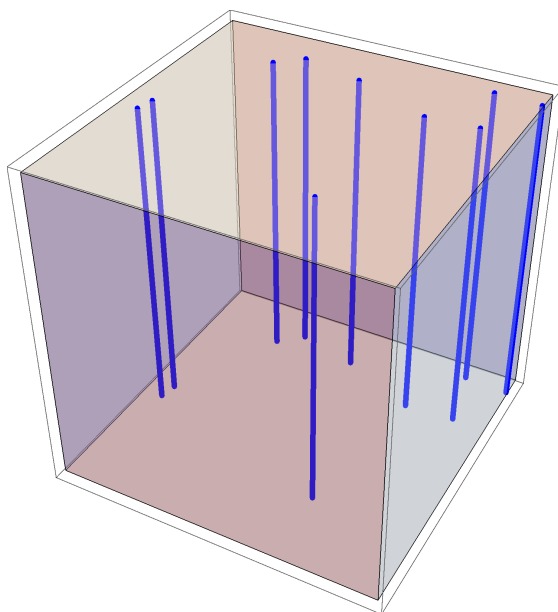
שיטת הפרוסות: (ראו איור 4)

$$\iiint_R g = \int_e^f \left(\iint_{[a,b] \times [c,d]} g(x, y, z) dx dy \right) dz$$

פירוק מלא:

$$\iiint_R g = \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b g(x, y, z) dx \right) dy \right) dz$$

הערה: כלומר, אם מנסים לחשב אינטגרל משולש באמצעות אינטגרלים נשנים באחת השיטות וזה פועל, אז בדעבד זה מותר. "אם זה פועל, אז זה פועל". נציין שבכל שיטה יש לפחות שני תנאים: האינטגרל הפנימי צריך להיות קיים לכל ערך/ערכים קבועים, והאינטגרל של תוצאת האינטגרל הפנימי (שהוא האינטגרל החיצוני) צריך להיות קיים גם הוא.



איור 3: שיטת הקטעים: עושים אינטגרציה מעל כל נקודה קבועה בהיטל של התחום.

דוגמאות:

1. נחשב את האינטגרל המשולש הבא:

$$\iiint_{[0,1]^3} z^2 dx dy dz = \iint_{[0,1]^2} \left(\int_0^1 z^2 dz \right) dx dy = \iint_{[0,1]^2} \frac{1}{3} dx dy = \frac{1}{3}$$

2. כמו עבור אינטגרל כפול,

$$\iiint_R 1 dx dy dz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f 1 dz \right) dy \right) dx = (f - e)(d - c)(b - a) = |R|$$

1.2 אינטגרל משולש בקבוצת ג'ורדן

הגדרה של קבוצת ג'ורדן ושל אינטגרל משולש על קבוצת ג'ורדן

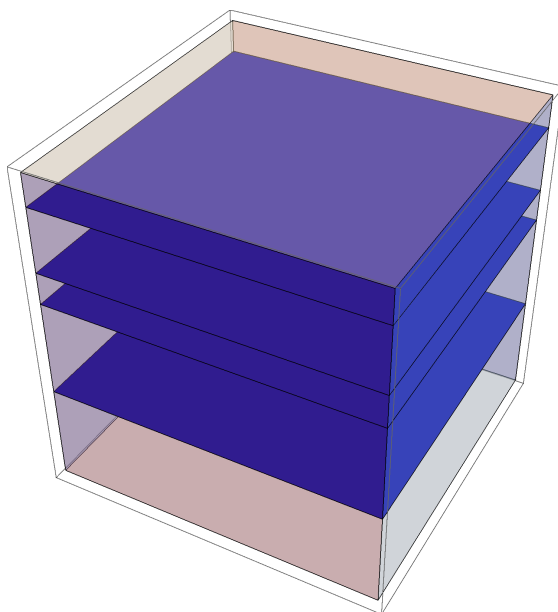
הגדרה: תהי $V \subset \mathbb{R}^3$ קבוצה חסומה.

1. נאמר ש- V היא קבוצת ג'ורדן (או בעלת נפח) אם קיימת תיבה R אשר מכילה את V כך שהפונקציה המאפיינת של V :

$$\chi_V(x, y, z) \equiv \mathbb{1}_V(x, y, z) = \begin{cases} 1 & (x, y, z) \in V \\ 0 & (x, y, z) \notin V \end{cases}$$

היא אינטגרלית לפי רימן בתיבה R . במקרה זה, נגדיר את הנפח של V על ידי

$$|V| = \iiint_R \chi_V(x, y, z) dx dy dz$$



איור 4: שיטת הפרוסות: עושים אינטגרציה בכל גובה קבוע על החתך, או פרוסה, של התחום באותו גובה.

2. תהי $f(x, y, z)$ מוגדרת בקבוצת ג'ורדן V . נאמר ש- f אינטגרלית ב- V אם קיימת תיבה R אשר מכילה את V כך שהפונקציה המורחבת

$$\tilde{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & (x, y, z) \in V \\ 0 & (x, y, z) \notin V \end{cases}$$

אינטגרלית בתיבה R . במקרה זה, נגדיר

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_R \tilde{f}(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

ראו איור 5.

משפט 5: שני המושגים הנ"ל אינם תלויים בבחירת התיבה R , בתנאי שהיא מכילה את V .

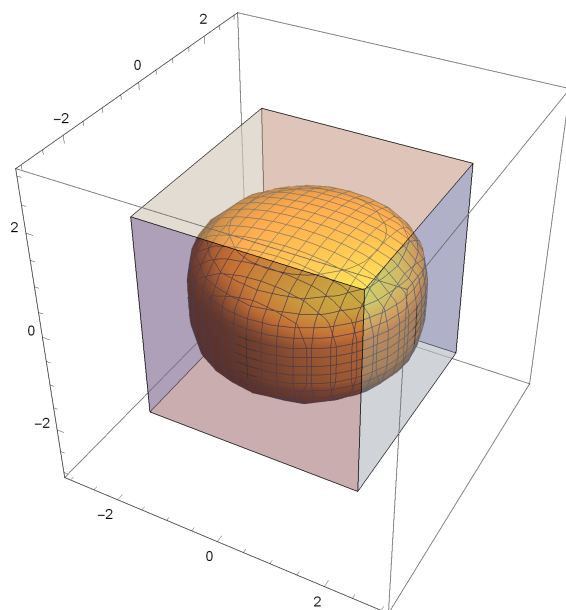
הערה: המושג "קבוצה בעלת נפח" אינו מתייחס לכך שהנפח של הקבוצה הוא חיובי, אלא לעובדה שהנפח של הקבוצה בכלל מוגדר. לדוגמה, נקודה בודדת ("יחידון") הוא קבוצה בעלת נפח (והנפח הזה הוא אפס).

זיהוי של קבוצות בעלות שטח אפס

משפט 6:

1. קבוצה A היא קבוצת ג'ורדן בעלת נפח אפס אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים כיסוי של A על ידי סדרה סופית של תיבות אשר סכום נפחיהן קטן מ- ε . כלומר, קיימת סדרת תיבות $R_1, R_2, \dots, R_N$ עבורם $A \subset \bigcup_{k=1}^N R_k$ וכן

$$\sum_{k=1}^N |R_k| < \varepsilon$$



איור 5: תחום שאינו תיבה, ותיבה גדולה שמכילה את התחום.

2. תהי V קבוצה חסומה. אז V היא קבוצת ג'ורדן אם ורק אם לשפה ∂V יש נפח אפס.

3. נניח ש- A_1 ו- A_2 קבוצות בעלות נפח אפס. אז $A_1 \cup A_2$ בעלת נפח אפס.

4. נניח ש- V_1 ו- V_2 קבוצות ג'ורדן. אז $V_1 \cup V_2$ קבוצת ג'ורדן.

5. תהי $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרלית רימן כאשר $D \subset \mathbb{R}^2$ קבוצת ג'ורדן. אז הגרף שלה

$$G = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$$

בעל נפח אפס.

כמעט כל תחום שניתקל בו יהיה כזה ששפתו איחוד של כמה גרפים של פונקציות רציפות. לכן תחומים אלו יהיו קבוצות ג'ורדן.

נסביר בקצרה את הרעיון מאחורי סעיף 2 במשפט. הפונקציה $\mathbb{1}_V$ רציפה בכל נקודה פרט לנקודות על השפה ∂V , מכיוון שבסביבת כל נקודה שאינה על הספרה, זו פונקציה קבועה (0 או 1, לפי מיקום הנקודה). כלומר, אוסף נקודות אי-הרציפות של הפונקציה המאפיינת היא השפה.

לכן לפי המשפט כי פונקציה חסומה בתיבה היא אינטגרלית אם ורק אם קבוצת נקודות אי-הרציפות שלה היא בעלת נפח אפס, הפונקציה המאפיינת אינטגרלית בתיבה החוסמת אם ורק השפה של V היא ממידה אפס.

דוגמה: הכדור $V \equiv B(0, R) \equiv \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$ הוא קבוצה בעלת נפח, כי השפה שלה היא הספרה, שהיא איחוד של שני גרפים של פונקציות רציפות מעל קבוצת ג'ורדן:

$$z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

לכן השפה היא קבוצה בעלת נפח 0.

תכונות יסודיות של אינטגרל משולש על קבוצת ג'ורדן

משפט 7: $V \subset \mathbb{R}^3$ קבוצת ג'ורדן.

1. הנפח של V נתון על ידי $|V| = \iiint_V 1 dx dy dz$.
2. אם f אינטגרבילית ב- V אז היא חסומה ב- V .
3. לינאריות: אם $f(x, y, z)$ ו- $g(x, y, z)$ אינטגרביליות ב- V , אז לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים ש- $\alpha f + g$ אינטגרבילית ב- V ו-

$$\iiint_V (\alpha f + g) = \alpha \iiint_V f + \iiint_V g$$
4. מונוטוניות: אם $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ בכל V פרט לתת קבוצה ממידה אפס ושתייהן אינטגרביליות ב- V , אז $\iiint_V f \leq \iiint_V g$.
- זה נכון גם עבור אי שוויון חזק $<$ בתנאי שהוא מתקיים בכל V פרט לתת קבוצה ממידה אפס.
5. אינטגרביליות של הרכבה: אם $f(x, y, z)$ אינטגרבילית ב- V ו- $\alpha \leq f(x, y, z) \leq \beta$ לכל $(x, y, z) \in V$, ואם $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה, אז ההרכבה $\varphi(f(x, y, z))$ אינטגרבילית ב- V .
6. אינטגרביליות של חזקה טבעית: אם $f(x, y, z)$ אינטגרבילית ב- V , אז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים ש- $f(x, y, z)^n$ אינטגרבילית ב- V .
- בנוסף, אם f חסומה מן האפס: $\inf_V |f| > 0$, אז $\frac{1}{f}$ אינטגרבילית ב- V .
7. אינטגרביליות של מכפלה: אם $f(x, y, z)$ ו- $g(x, y, z)$ אינטגרביליות ב- V , אז המכפלה fg אינטגרבילית ב- V .
8. אי-שוויון המשולש האינטגרלי: אם $f(x, y, z)$ אינטגרבילית ב- V , אז גם ערכה המוחלט $|f(x, y, z)|$ פונקציה אינטגרבילית ב- V . בנוסף,

$$\left| \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \right| \leq \iiint_V |f(x, y, z)| dx dy dz$$

9. משפט ההערכה: אם $f(x, y, z)$ אינטגרבילית ב- V , ולכל $(x, y, z) \in V$ פרט לתת קבוצה ממידה אפס מתקיים ש- $m \leq f(x, y, z) \leq M$, אז

$$m(b-a)(d-c)(f-e) \leq \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \leq M(b-a)(d-c)(f-e)$$

10. אם ל- V יש נפח אפס, אז כל פונקציה חסומה על V היא אינטגרבילית ומתקיים ש-

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = 0$$

11. תהי V קבוצת ג'ורדן (חסומה), ותהי $f(x, y, z)$ רציפה וחסומה ב- V . אז $f(x, y, z)$ אינטגרבילית ב- V .

אדיטיביות

משפט 8: נניח כי V_1 ו- V_2 קבוצות ג'ורדן. אז הפונקציה $f(x, y, z)$ אינטגרלית ב- V_1 ו- V_2 אם ורק אם היא אינטגרלית ב- $V_1 \cup V_2$.

אם נתון בנוסף כי $V_1 \cap V_2$ קבוצה ממידה אפס אז

$$\iiint_{V_1 \cup V_2} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{V_1} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz + \iiint_{V_2} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

בפרט, אינטגרליות עוברת לכל תת קבוצת ג'ורדן של קבוצת ג'ורדן נתונה.

הערה: אם V אינו פשוט אז אפשר לנסות לפצל אותו לאיחוד של מספר תחומים פשוטים, ואז להשתמש באדיטיביות.

כדאי שהאיחוד יהיה **לא חופף**, כלומר כך שהחיתוך בין כל שני תחומים פשוטים יהיה ממידה אפס.

דוגמה מקדימה לחישוב של אינטגרל משולש בקבוצת ג'ורדן

איך מחשבים אינטגרל משולש בתחום שאינו תיבה? נתחיל בדוגמה מקדימה.

נחשב את הנפח של הכדור $V = B(0, R)$. לפי תכונות האינטגרל,

$$|V| = \iiint_{B(0, R)} 1 \cdot dx \, dy \, dz$$

לפי ההגדרה, צריך לבחור תיבה שהכדור מוכל בה. נוכל לבחור למשל את התיבה $[-R, R]^3$ (ראו איור 6). לכן לפי שיטת הקטעים,

$$V = \iiint_{[-R, R]^3} \tilde{f}(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_{[-R, R]^2} \left(\int_{-R}^R \tilde{f}(x, y, z) \, dz \right) dx \, dy$$

נחשב תחילה את האינטגרל הפנימי. מתקיים $\tilde{f}(x, y, z) \neq 0$ אם $(x, y, z) \in B(0, R)$. בפרט, יש (x, y) -ים מסוימים שעבורם אין אף z מתאים:

הגדרה: ההיטל של קבוצה $V \subset \mathbb{R}^3$ על מישור xy הוא הקבוצה

$$\pi(V) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists z \in \mathbb{R} : (x, y, z) \in V\}$$

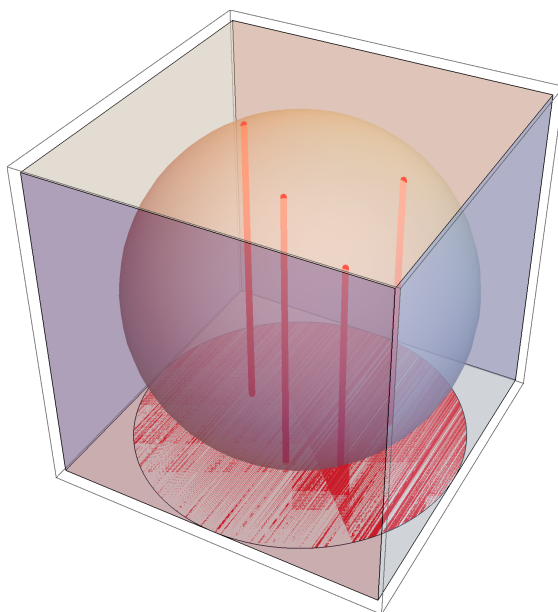
לכן

$$|V| = \iint_{\pi(V)} \left(\int_{-R}^R \tilde{f}(x, y, z) \, dz \right) dx \, dy$$

(כי עבור $(x, y) \notin \pi(V)$ האינטגרל הפנימי הוא 0 ולכן לא תורם דבר).

במקרה שלנו, $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ אם (x, y) (כדאי לחשוב על x, y קבועים) $z^2 \leq R^2 - x^2 - y^2$. יש כאלה z -ים אם $R^2 - x^2 - y^2 \geq 0$, ואז

$$-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$



איור 6: הכדור $B(0, R)$, התיבה $[-R, R]^3$ שמכילה את הכדור. ניתן לראות את ההיטל של הכדור באדום, ומספר קטעי אינטגרציה.

לכן

$$V = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} 1 \, dz \right) dx \, dy = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} 2\sqrt{R^2-x^2-y^2} \, dx \, dy$$

זהו אינטגרל כפול, שניתן לחשב בעזרת כל המשפטים המוכרים. נעבור למשתנים פולריים:

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R 2\sqrt{R^2-r^2} r \, dr = 2\pi \cdot \left. -\frac{(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^R = \frac{4\pi R^3}{3}$$

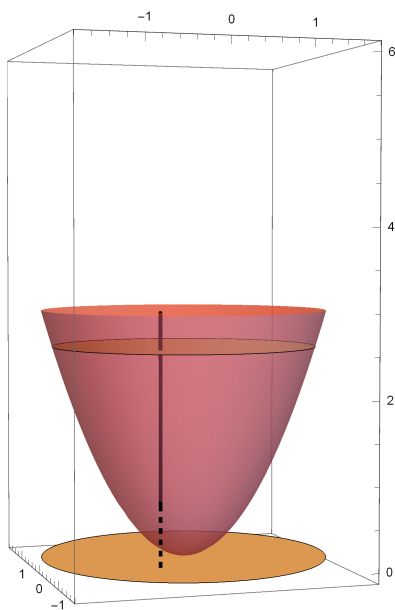
חישוב של אינטגרל משולש בקבוצת ג'ורדן

נשתמש במשפט פוביני על $\iiint_V \tilde{f}(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ ונקבל כדלקמן במקרה ש- V פשוט בהתאם לשיטה שבה רוצים להשתמש. אם V בעל נפח ו- f אינטגרלית ב- V , אז

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \iint_D \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx \, dy && \text{(שיטת הקטעים);} \\ &= \int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x, y, z) \, dx \, dy \right) dz && \text{(שיטת הפרוסות);} \\ &= \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx && \text{(פירוק מלא).} \end{aligned}$$

הערות:

- בשיטת הקטעים, D הוא ההיטל של V על מישור xy . אפשר כמובן להשתמש בשיטת הקטעים ביחס לכל ציר.
- בשיטת הפרוסות, D_z הוא החתך של V בגובה z . אפשר כמובן להשתמש בשיטת הפרוסות גם ביחס למשתנה x (או y).
- כדאי לזכור את כלל האצבע שגבולות אינטגרציה יכולים להיות תלויים רק במשתנים שהאינטגרל עליהם חיצוני יותר (מאוחר יותר).
- כל השיטות זהות למקרה של תיבה. באופן זה אין צורך להתעסק עם הפונקציה המורחבת $\tilde{f}$ (אם כי זה מה שעושים בעצם כאשר מחפשים את ההיטל או החתכים). ראו איור 7.



איור 7: תחום בעל נפח, ההיטל שלו, אחד מקטעי האינטגרציה (החלק שלא מקווקו), ואחד החתכים/פרוסות.

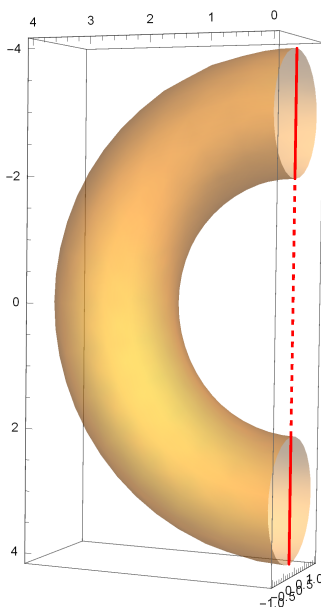
- אם התחום V אינו פשוט (ראו למשל איור 8), אז יתכנו מספר "חתיכות" מסוג מסוים (ואז מקבלים סכום של אינטגרלים).

לדוגמה, יתכן שחתכים בגבהים מסוימים מורכבים משני חלקים נפרדים, או שקטע אינטגרציה בשיטת הקטעים הוא בעצם איחוד של שני קטעים לא צמודים. הכל פועל גם במקרים אלו, כאשר יש לסכום את האינטגרלים על כל החלקים כאמור.

במקרים כאלו, אפשר גם לפצל את התחום למספר תחומים פשוטים.

דוגמה: נחשב את נפח הגוף שמוגדר על ידי

$$\begin{cases} z^2 \leq x \leq \sqrt{z} \\ 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq y \leq z \end{cases}$$



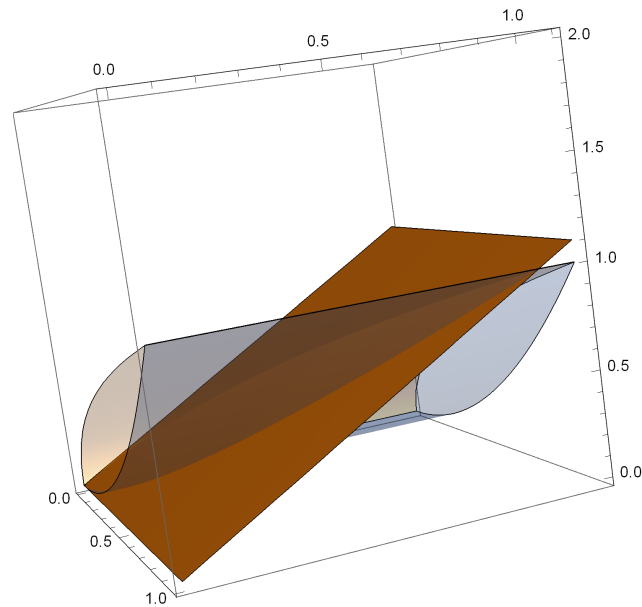
איור 8: תחום שבו יש כמה קטעים זרים מעל נקודות מסוימות בהיטל.

המשטח $y = z$ הוא מישור. קל לצייר את החתך של התחום $z^2 \leq x \leq \sqrt{z}$ עם מישור xz , ומכיוון שזהו תחום גלילי (נראה זהה לכל y) צריך רק "למרוח" את החתך הזה לאורך כל ציר y . לסיכום נקבל את התחום באיור 9.

ניתן לראות על ידי התבוננות בתחום שערכי z (בסך הכל) הם בדיוק ב- $[0, 1]$; לכל z קבוע, ערכי y הם בדיוק ב- $[0, z]$; ולכל z , קבועים, ערכי x הם בדיוק ב- $[z^2, \sqrt{z}]$. לכן

$$V = \int_0^1 \left(\int_0^z \left(\int_{z^2}^{\sqrt{z}} dx \right) dy \right) dz = \int_0^1 \left(z^{\frac{3}{2}} - z^3 \right) dz = \frac{3}{20}$$

הערה: על פניו, גבולות האינטגרציה זהים לגבולות בתיאור של התחום. זו שיטה טובה למציאת גבולות אינטגרציה, אך יש לה חסרונות. ראשית יש לוודא שזה מתאים לכלל האצבע שגבולות אינטגרציה יכולים להיות תלויים אך ורק במשתנים שעושים עליהם אינטגרציה ממש מחוץ לאינטגרל הנוכחי (הגבול הפנימי של האינטגרציה dx לא יכול להיות תלוי ב- x ...). שנית, יש לוודא שהתיאור הוא "הדוק": אם נחליף את השורה $0 \leq z \leq 2$, ניתן לבדוק שמתקבל בדיוק אותו התחום (כי אז החלק של $1 < z < 2$ הוא ריק!), אבל באינטגרל החלק הנוסף $1 < z < 2$ לא נותן 0.



איור 9: תחום גלילי קטום על ידי מישורים.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. קווי גובה של פונקציה והגרדיאנט ניצב אליהם.
2. ייצוג פרמטרי של קו ישר במרחב.

“ Please excuse the crudity of this model.

”

Dr. Emmett Brown, Back to the Future