

הרצאה 17: החלפת משתנים באינטגרל כפול

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1	החלפת משתנים באינטגרל כפול
2	1.1	החלפת משתנים באינטגרל כפול



1 | החלפת משתנים באינטגרל כפול

1.1 החלפת משתנים באינטגרל כפול

אינטואיציה ונוסחה

עבור אינטגרל במשתנה יחיד, אפשר להחליף משתנה $x = \varphi(t)$ באופן הפשוט הבא:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

כאשר $a = \varphi(\alpha)$ ו- $b = \varphi(\beta)$.

הרעיון הגיאומטרי הוא שאם לוקחים קטע קטנצ'יק $[t, t + \Delta t]$ שאורכו Δt , אז לאחר הטרנספורמציה ל- x האורך שלו הוא בערך

$$\Delta x \approx \varphi'(t) \Delta t$$

לכן נהוג גם לכתוב " $dx = \varphi'(t) dt$ " (חדי-העין יבחינו שיש כאן מוזרות קטנה, שנבהיר ונחדד אט-אט).

עבור אינטגרל כפול, נראה הרבה דמיון אבל גם הבדלים חשובים, שכולם נובעים מאותו מקום. בלי הרבה פוליטיקה בינתיים (כפי שנראה, במקרה הזה היא חשובה מאוד), עבור החלפת משתנים מהסוג $(x, y) = T(u, v)$, כלומר

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

תהיה לנו נוסחה כזו:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \quad (1)$$

לפני כל הפוליטיקה והניואנסים החשובים, נלמד איך להשתמש בה. כדי לעשות את זה חייבים להבין שני דברים: מהי E ומה זה היצור המוזר שמחליף את $\varphi'(t)$ בנוסחה.

- E היא התחום D במישור uv . נדגים מיד ולאחר מכן נתאר במדויק.
- הביטוי $\left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ יבטא את מידת המתיחה או הכיווץ המקומי של החלפת המשתנים, ממש כמו $\varphi'(t)$. המטריצה הפנימית מכונה **מטריצת יעקובי** והיא מוגדרת כך:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

הדטרמיננט שלה נקרא **היעקוביאן של הטרנספורמציה**,

$$J_T(u, v) = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right|$$

יש לחשוב על J_T כפקטור "עיוות" של השטח.

קואורדינטות פולריות

נגדיר

$$\begin{cases} x(r, \theta) = r \cos \theta \\ y(r, \theta) = r \sin \theta \end{cases} \quad (2)$$

החלפת המשתנים הזו מכונה **קואורדינטות קוטביות** והיא שימושית בדוגמאות רבות. נחשב אחת ולתמיד את היעקוביאן שלה.

משפט 1. היעקוביאן של החלפת המשתנים הקוטבית (2) מקיים $|J| = r$.

דוגמה: נחשב את $\iint_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dx dy$ כאשר D ברביע הראשון חסום בין: המעגלים $x^2 + y^2 = 1$ ו- $x^2 + y^2 = 4$, והישרים $y = x$ ו- $y = \sqrt{3}x$. נעיר שהתחום המתואר הוא פשוט אבל "מעצבן", כי צריך לפצל ולפענח נקודות חיתוך.

נבחר החלפת משתנים כדי שתיאור התחום יהפוך להיות כמה שיותר קל. התחום ניתן לתיאור מילולי: הרדיוס בין 1 ל-2 והזווית בין $\frac{\pi}{4}$ לבין $\frac{\pi}{3}$. ליתר דיוק, נשתמש בקואורדינטות פולריות ונקבל כי

$$E = \left\{ (r, \theta) \mid 1 \leq r \leq 2, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \right\}$$

כעת, לפי הנוסחה להחלפת משתנים (1),

$$\iint_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dx dy = \iint_E \arctan\left(\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta}\right) r dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^2 \arctan(\tan \theta) r dr \right) d\theta$$

נשים לב כי לכל $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ מתקיים $\arctan(\tan \theta) = \theta$ (זה לא נכון לכל $\theta \in \mathbb{R}$, תחום האינטגרציה חשוב!) ולכן

$$\begin{aligned} \iint_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dx dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^2 \theta r dr \right) d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \theta \left. \frac{r^2}{2} \right|_1^2 d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \theta d\theta = \frac{3}{2} \left. \frac{\theta^2}{2} \right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{4} \left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{16} \right) = \frac{7\pi^2}{192} \end{aligned}$$

ניסוח לא מדויק של המשפט על החלפת משתנים באינטגרל כפול

ניתן להשתמש בנוסחה של החלפת משתנים באינטגרל כפול (1) כאשר מתקיימים התנאים הבאים.

1. T חד חד ערכית ועל בין E לבין D .

2. ההעתקה T גזירה ברציפות ב- E .

3. לכל $(u, v) \in E$ מתקיים $J_T(u, v) \neq 0$.

זהו לא ניסוח מדויק של המשפט, אלא רשימה פשוטה של התנאים העקרוניים הנחוצים כדי להשתמש בו. הניסוח המדויק קצת יותר מסורבל.

נעיר לבסוף שאם התנאים מתקיימים פרט לתת קבוצה ששטחה 0, עדיין אפשר להשתמש בנוסחה.

ניסוח המשפט על החלפת משתנים באינטגרל כפול

הנה ניסוח מדויק אפשרי של המשפט, למען השלמות.

משפט 2: יהיו $D, E \subset \mathbb{R}^2$ תחומי ג'ורדן, ותהי

$$T(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$$

טרנספורמציה שמקיימת את התנאים הבאים:

$$1. T(\bar{E}) = \bar{D}$$

2. ההעתקה T גזירה ברציפות ב- $\bar{E}$ (כלומר, $x(u, v)$ ו- $y(u, v)$ בעלות נגזרות חלקיות רציפות בכל $\bar{E}$), ובנוסף כל הנגזרות החלקיות רציפות ליפשיץ ב- $\bar{E}$.

3. ההעתקה T חד-חד-ערכית ב- E .

4. לכל $(u, v) \in E$ מתקיים $J_T(u, v) \neq 0$.

אז לכל $f(x, y)$ אינטגרלית ב- $\bar{D}$ מתקיים ש-

$$\iint_{\bar{D}} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\bar{E}} f(x(u, v), y(u, v)) |J_T(u, v)| \, du \, dv$$

(והאינטגרנד באגף ימין אינטגרלי ב- $\bar{E}$).

הערות לגבי המשפט על החלפת משתנים

1. החלפת משתנים לקואורדינטות פולריות היא דוגמה מרכזית לכך שלפעמים אין חח"ע על הכל אלא צריך לוותר על תת קבוצה ששטחה 0. למשל, אם D הוא עיגול היחידה אז

$$E = \{0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi\}$$

ועל השפה אין חח"ע.

2. התנאי על היעקוביאן הוא לא עקרוני, ובאמת אפשר להפטר ממנו לחלוטין בעזרת משפט מתקדם שמכונה משפט סרד (Arthur Sard, 1909 – 1980).

3. התנאי כי T חד-חד-ערכית, תנאי שלא היה קיים בהצבה במשתנה יחיד, הוא עקרוני. אם למשל לכל נקודה ב- D יש שני מקורות ב- E תחת T , אז השוויון (1) לא הגיוני, כי באגף ימין "עוברים על כל D פעמיים".

מדוע תנאי זה לא היה קיים במשתנה יחיד? כי לאינטגרל $\int_a^b f(x) \, dx$ יש פיצ'ר שלא קיים באינטגרל כפול: אוריינטציה. למשל,

$$\int_b^a f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx$$

גם אם ההחלפה אינה חד ערכית, אז באינטגרל $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ תבצע סריקה מ- α אל β תוך התחשבות בסימן ההתקדמות כי אין ערך מוחלט על $\varphi'(t)$. זה יגרום לביטולים כאשר "הולכים אחורה" כך שאין ספירה מרובה גם אם $\varphi(t)$ אינה חד ערכית.

4. התנאי כי $T(E) = D$ הוא עקרוני, היות שאחרת אגף ימין בשוויון (1) כלל לא מכסה את כל D (או שאולי מכסה נקודות מחוץ ל- D).

5. התנאי של חח"ע הוא כאמור מאוד עקרוני, וחשוב לא להתבלבל: הוא לא נובע מכך שהיעקוביאן לא מתאפס! אגב, הוא גם לא גורר אותו. אלו שני תנאים נפרדים.

יעקוביאן של טרנספורמציה הפוכה

דוגמה: נחשב את $\iint_D \sqrt{xy} dx dy$ כאשר D חסום בין: הפרבולות $y^2 = 3x$ ו- $y^2 = 6x-1$, וההיפרבולות $y = \frac{9}{x}$ ו- $y = \frac{4}{x}-1$.

שוב מדובר בתחום פשוט אך לא נוח. אפשר לתאר את D באופן הבא:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, 4 < xy < 9, 3 < \frac{y^2}{x} < 6 \right\}$$

לכן כדאי להגדיר החלפת משתנים על ידי

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y^2}{x} \end{cases}$$

בעיה: ההחלפה מוצגת "הפוך".

המשפט הבא הוא תוצאה של משפט הפונקציות הסתומות. נסו להוכיח אותו בתור תרגיל.

משפט 3. נניח כי $S : D \rightarrow E$ חד ערכית ב- D , על E (כלומר $S(D) = E$), וגזירה ברציפות בכל D . אם $J_S \neq 0$ בכל נקודה של D , אז ההעתקה ההפוכה $T = S^{-1}$ גזירה ברציפות בכל E ובנוסף

$$J_T = \frac{1}{J_S}$$

כלומר, אם נתונה העתקה בכיוון ההפוך למה שמופיע במשפט החלפת המשתנים, אפשר לנצל את השוויון $J_T = \frac{1}{J_{T^{-1}}}$ כדי לחשב את היעקוביאן מבלי לבצע היפוך מלא של הטרנספורמציה.

דוגמה: נמשיך את הדוגמה שהתחלנו. נחשב את היעקוביאן של הטרנספורמציה ההפוכה שהגדרנו,

$$\det \left(\frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} \right) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = 3 \cdot \frac{y^2}{x}$$

$$\text{לכן } J_T = \frac{1}{J_{T^{-1}}} = \frac{1}{3 \cdot \frac{y^2}{x}} = \frac{1}{3v} \quad \text{ולכן } J_{T^{-1}} = 3 \cdot \frac{y^2}{x}$$

בנוסף,

$$E = \{(u, v) \mid 4 < u < 9, 3 < v < 6\}$$

לבסוף, לא קשה לבצע היפוך של ההחלפה שהגדרנו ובכך להיווכח שהיא אכן חד-חד ערכית. נדלג על בדיקה זו ורק נחשב:

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{xy} dx dy &= \iint_E \sqrt{u} \cdot \frac{1}{3v} du dv = \int_4^9 \left(\int_3^6 \frac{\sqrt{u}}{3v} dv \right) du \\ &= \int_4^9 \frac{\sqrt{u}}{3} \cdot \ln v \Big|_{v=3}^{v=6} du = \frac{\ln 2}{3} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_4^9 = \frac{2 \ln 2}{9} \left(9^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{38 \ln 2}{9} \end{aligned}$$

הערה: לעיתים שוכחים מיהו היעקוביאן שיש להשתמש בו בנוסחה של החלפת המשתנים (1). כלל אצבע פשוט כדי להיזכר הוא

$$dx dy = \left| \det \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right| du dv$$

כאשר רואים צמצום של u, v באגף ימין כך שנשארים רק x, y .

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:
1. משטחים ריבועיים.

“Dirichlet alone, not I, nor Cauchy, nor Gauss knows what a completely rigorous mathematical proof is. Rather we learn it first from him. When Gauss says that he has proved something, it is very clear; when Cauchy says it, one can wager as much pro as con; when Dirichlet says it, it is certain.”

”

Carl Jacobi