

הרצאה 16: חישוב ותכונות של אינטגרל כפול בקבוצת ג'ורדן

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1 אינטגרל כפול (המשך)
2	1.1 תכונות של אינטגרל כפול בקבוצת ג'ורדן
4	1.2 חישוב של אינטגרל כפול בקבוצת ג'ורדן



1 | אינטגרל כפול (המשך)

1.1 תכונות של אינטגרל כפול בקבוצת ג'ורדן

תכונות יסודיות של אינטגרל כפול על קבוצת ג'ורדן

בסעיף הזה נדבר על תכונות כלליות של אינטגרל כפול. חלקן נובעות בקלות מהגרסה עבור מלבן, ואחרות יותר מורכבות.

משפט 1: תהי $D \subset \mathbb{R}^2$ קבוצת ג'ורדן.

1. **לינאריות:** אם $f(x, y)$ ו- $g(x, y)$ אינטגרביליות ב- D ו- $\alpha \in \mathbb{R}$ סקלר, אז $\alpha f(x, y) + g(x, y)$ אינטגרבילית ב- D ו-

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + g(x, y)) \, dx \, dy = \alpha \iint_D f(x, y) \, dx \, dy + \iint_D g(x, y) \, dx \, dy.$$

2. **הרכבה:** אם $\alpha \leq f(x, y) \leq \beta$ לכל $(x, y) \in D$ פרט לקבוצה ממידה אפס ו- $f(x, y)$ אינטגרבילית ב- D , ואם $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה, אז ההרכבה $\varphi(f(x, y))$ אינטגרבילית ב- D .

3. **אינטגרביליות של חזקה טבעית:** אם $f(x, y)$ אינטגרבילית ב- D , אז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים ש- $f(x, y)^n$ אינטגרבילית ב- D .

בנוסף, אם f חסומה מן האפס: $\inf_D |f| > 0$, אז $\frac{1}{f}$ אינטגרבילית ב- D .

4. **מכפלה:** אם $f(x, y)$ ו- $g(x, y)$ אינטגרביליות ב- D , אז $f(x, y)g(x, y)$ אינטגרבילית ב- D .

5. **מונוטוניות:** אם $f(x, y) \leq g(x, y)$ לכל $(x, y) \in D$ פרט לקבוצה ממידה אפס וכן f, g אינטגרביליות ב- D , אז

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy \leq \iint_D g(x, y) \, dx \, dy.$$

זה נכון גם עבור אי שוויון חזק $<$ בתנאי שהוא מתקיים בכל הקבוצה פרט לקבוצה ממידה אפס.

6. **אי-שוויון המשולש האינטגרלי:** אם $f(x, y)$ אינטגרבילית ב- D אז $|f(x, y)|$ אינטגרבילית ב- D , ו-

$$\left| \iint_D f(x, y) \, dx \, dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| \, dx \, dy.$$

7. **משפט ההערכה:** אם $f(x, y)$ אינטגרבילית ב- D ולכל $(x, y) \in D$ פרט לקבוצה ממידה אפס מתקיים ש- $m \leq f(x, y) \leq M$ אז

$$m|D| \leq \iint_D f(x, y) \, dx \, dy \leq M|D|$$

הקשר בין רציפות לבין אינטגרביליות בקבוצת ג'ורדן

משפט 2: תהי $D \subset \mathbb{R}^2$ קבוצת ג'ורדן. תהי D קבוצת ג'ורדן (חסומה), ותהי $f(x, y)$ רציפה וחסומה ב- D . אז $f(x, y)$ אינטגרבילית ב- D .

כמו עבור מלבן, המשפט הנ"ל אינו שקילות.

הערה: אנחנו רגילים לכך שפונקציה רציפה היא אינטגרבילית. כעת צריך להיזהר, כי קבוצת ג'ורדן אינה בהכרח סגורה ולכן פונקציה רציפה לא חייבת להיות אפילו חסומה.

אי-אפשר להוכיח את משפט 2 ישירות מהגרסה שלו למלבן, אלא צריך לחזור על ההוכחה ולשלב בה גם טיפול בכך ש- $\tilde{f}(x, y)$ לא רציפה על שפת D . למעשה, זה בערך אחד הכיוונים במשפט "חסומה היא אינטגרבילית אם"ם מידה 0 של נקודות אי-רציפות".

דוגמה: הפונקציה $f(x, y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$ מוגדרת ורציפה בכל עיגול היחידה $x^2 + y^2 < 1$ שהוא קבוצת ג'ורדן, אבל היא לא חסומה ולכן כמובן שאינה אינטגרבילית בו.

אדיטיביות

למה 3: תהי $D \subset \mathbb{R}^2$ קבוצת ג'ורדן. אם ל- D יש שטח אפס, אז כל פונקציה חסומה על D היא אינטגרבילית ומתקיים ש-

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = 0.$$

התכונה הבאה קלה להוכחה, אבל לא הייתה רלוונטית למלבן. היא מכונה **אדיטיביות**.

משפט 4: נניח כי D_1 ו- D_2 קבוצות ג'ורדן. אז הפונקציה $f(x, y)$ אינטגרבילית ב- D_1 ו- D_2 אם ורק אם היא אינטגרבילית ב- $D_1 \cup D_2$.

אם נתון בנוסף כי $D_1 \cap D_2$ קבוצה ממידה אפס אז

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{D_1} f(x, y) \, dx \, dy + \iint_{D_2} f(x, y) \, dx \, dy.$$

בפרט, אינטגרביליות עוברת לכל תת קבוצת ג'ורדן של קבוצת ג'ורדן נתונה.

הערה: אם D אינו פשוט אז אפשר לנסות לפצל אותו לאיחוד של מספר תחומים פשוטים, ואז להשתמש באדיטיביות.

כדאי שהאיחוד יהיה **לא חופף**, כלומר כך שהחיתוך בין כל שני תחומים פשוטים יהיה ממידה אפס.

משפט ערך הביניים האינטגרלי

לבסוף, יש גם משפט ערך הביניים האינטגרלי:

משפט 5: תהי $f(x, y)$ רציפה ואינטגרלית בקבוצת ג'ורדן קשירה מסילתית. אז קיימת נקודה $P^* \in D$ כך ש-

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = f(P^*) |D|$$

1.2 חישוב של אינטגרל כפול בקבוצת ג'ורדן

מוטיבציה לתחומים פשוטים

נניח שברצוננו לחשב את $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$. אם D מספיק פשוט, אפשר לשלב את ההגדרה (עם ההרחבה $\tilde{f}$) עם משפט פוביני ולקבל ביטוי אשר פשוט לחישוב (בלי $\tilde{f}$).

דוגמה: נחשב את האינטגרל

$$I = \iint_{x^2+y^2 < 1} 1 \, dx \, dy$$

התוצאה אמורה להיות שטח העיגול, π .נבחר מלבן חוסם פשוט, $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$ ונגדיר

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 < 1, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

לפי משפט פוביני,

$$I = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \tilde{f}(x, y) \, dx \right) dy$$

נחשב קודם את האינטגרל הפנימי. עבור y קבוע, הפונקציה $\tilde{f}(x, y)$ מקיימת:

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} 1, & -\sqrt{1-y^2} < x < \sqrt{1-y^2}, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

לכן האינטגרל הפנימי הוא

$$\int_{-1}^1 \tilde{f}(x, y) \, dx = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1 \, dx = 2\sqrt{1-y^2}$$

לכן בסך הכל נקבל ש-

$$I = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1 \, dx \right) dy = \int_{-1}^1 2\sqrt{1-y^2} \, dy = \pi$$

הערה: בדוגמה, בחרנו מלבן R שהיה "הדוק" על העיגול D . אם היינו בוחרים מלבן גדול מדי, אז לחלק מערכי y היה מתקיים $\tilde{f}(x, y) \equiv 0$ לכל x .

תחומים פשוטים

בתחום כללי שאינו מלבן, משפט פוביני עדיין משמש לחישוב אינטגרלים כי במילא צריך לפי ההגדרה להרחיב את $f(x, y)$ ל- $\tilde{f}(x, y)$ במלבן גדול ולחשב שם. זה כמובן לא מאוד נוח מבחינה טכנית, כי $\tilde{f}(x, y)$ מוגדרת לפי תחומים על ידי ביטויים שונים.

מקרה כללי ונפוץ שניתן לתיאור בעצם בלי חלוקה לתחומים הוא המקרה הבא, שהוא מין פשרה על כך ש- D אינו מלבן:

הגדרה 6. קבוצת ג'ורדן D שניתנת לתיאור באופן הבא מכונה תחום פשוט ביחס לציר y :

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

קבוצת ג'ורדן D שניתנת לתיאור באופן הבא מכונה תחום פשוט ביחס לציר x :

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

בשני המקרים, נניח כי הפונקציות φ ו- ψ רציפות.

דוגמאות:

1. עיגול היחידה הסגור הוא תחום פשוט:

$$D = \left\{ -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$$

2. טבעת אינה תחום פשוט, אבל היא איחוד של שני תחומים פשוטים.

הערות:

- התנאי שהפונקציות φ, ψ רציפות הוא לא מהותי. מספיק שיהיה רציפות למקוטעין, או אפילו רק אינטגרביליות.
- בהגדרה של תחום פשוט השתמשנו באי שוויונים חלשים בכל מקום. שום דבר לא משתנה אם מחליפים את חלקם (או כולם) באי שוויונים חזקים.
- תחום הוא פשוט אם ורק אם כל חתך שלו הוא קטע (כלומר מרכיב קשירות יחיד).

משפט פוביני עבור תחום פשוט

משפט פוביני נותן אם כך נוסחה זריזה לחישוב אינטגרל כפול בתחום פשוט.

מסקנה: תהי $f(x, y)$ אינטגרבילית בתחום D אשר פשוט לפי ציר y . אז

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right) dx$$

באופן דומה, אם D פשוט לפי ציר x , אז

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) \, dx \right) dy$$

בשני המקרים, השוויון נכון בתנאי שהאינטגרל הנשנה באגף ימין מוגדר.

כלל אצבע לגבי אינטגרלים נשנים הוא שבגבולות האינטגרציה של אינטגרל יכולים להופיע אך ורק משתנים אשר חיצוניים יותר מהאינטגרל, כלומר, כאלה שעוד לא בוצעה עבורם אינטגרציה.

דוגמאות:

1. יהי D התחום החסום על ידי $x = y^2$, $y = 1$ ו- $x + 2y + 1 = 0$. נחשב את השטח של D .

נצייר את שלושת הקווים ונמצא תחום חסום ששפתו מורכבת רק מהם.

מתברר ש- D תחום פשוט:

$$D = \{-1 \leq y \leq 1, -2y - 1 \leq x \leq y^2\}$$

לכן

$$|D| = \iint_D 1 \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \int_{-2y-1}^{y^2} dx \, dy = \int_{-1}^1 (y^2 + 2y + 1) \, dy = \frac{2}{3} + 2 = 2\frac{2}{3}$$

2. נחשב את

$$I = \iint_D e^{-y^2} \, dx \, dy$$

כאשר D הוא המשולש

$$D = \{0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$$

לפי משפט פוביני,

$$I = \int_0^1 \int_x^1 e^{-y^2} \, dy \, dx$$

אנחנו לא יודעים לפתור את האינטגרל הפנימי!

מצד שני, התחום גם פשוט לפי y :

$$D = \{0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$$

לכן

$$I = \int_0^1 \int_0^y e^{-y^2} \, dx \, dy = \int_0^1 y e^{-y^2} \, dy = -\frac{1}{2} e^{-y^2} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2e}$$

החלפת סדר אינטגרציה

כדי להחליף סדר אינטגרציה יש לעבור דרך אינטגרל כפול.

דוגמה: נחליף סדר אינטגרציה באינטגרל הבא:

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{1-y}} f(x, y) \, dx \, dy + \int_0^1 \int_{1+\sqrt{1-y}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) \, dx \, dy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) \, dx \, dy$$

כדי להחליף סדר אינטגרציה, צריך לעבור דרך אינטגרל כפול. כלומר, צריך לשחזר את התחום D במישור שהאינטגרל הנשנה מייצג, ואז לכתוב אותו בסדר הפוך.

במקרה הנידון, התחום D הוא איחוד של שלושה תחומים פשוטים: אחד לכל נסכם. קל מאוד לתרגם את האינטגרל לתחום מתאים.

למשל, התחום הפשוט הראשון הוא

$$D_1 = \{0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1 - \sqrt{1-y}\}$$

כדי להבין אותו יותר טוב ולצייר אותו, נפענח את הקו $x = 1 - \sqrt{1-y}$:

$$x - 1 = -\sqrt{1-y} \Rightarrow (x-1)^2 = 1-y \Rightarrow y = 1 - (x-1)^2$$

כלומר, מדובר בחלק מפרבולה בוכה עם קודקוד בנקודה $(1,1)$ וחיתוך עם ציר x בנקודות $x=0$ ו- $x=2$.

עבור D_2 נקבל את אותה פרבולה ובנוסף את הקו $y = \sqrt{4-x^2}$, שהוא חלק מהמעגל $x^2 + y^2 = 4$.

עבור D_3 נקבל את אותו מעגל.

בסך הכל,

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 = \{0 \leq x \leq 2, 1 - (x-1)^2 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$

לכן:

$$I = \int_0^2 \int_{-x^2+2x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx$$

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. נוסחת ההצבה באינטגרל מסוים מחדו"א ב'1.

There are only two ways to live your life. One is as though nothing is a miracle. The other is as though everything is a miracle.

”

Albert Einstein