

הרצאה 15: אינטגרל כפול במלבן, קבוצות ג'ורדן

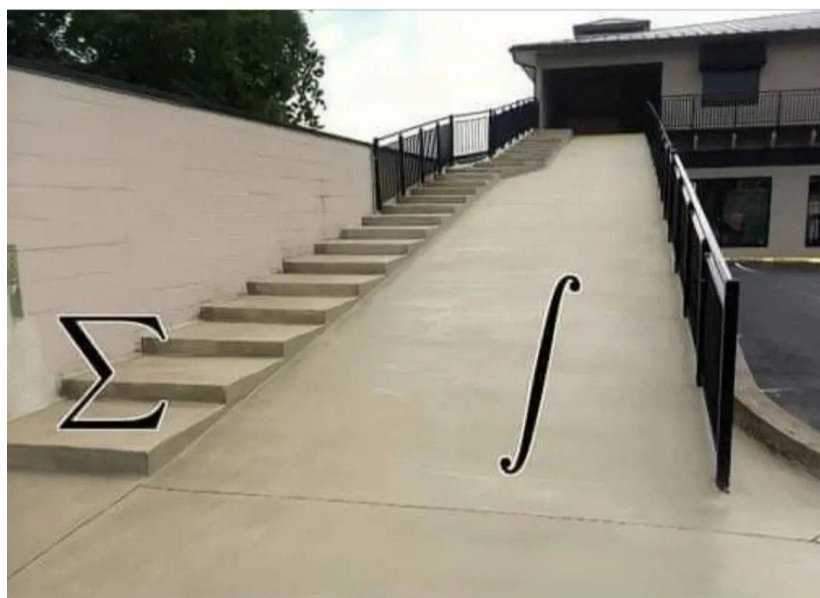
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1	אינטגרל כפול
2	1.1	אינטגרל כפול על מלבן
6	1.2	קבוצות ג'ורדן



אינטגרל כפול

1

1.1 אינטגרל כפול על מלבן

מוטיבציה, חלוקה

בפרק הזה נכיר את האנלוג של $\int_a^b f(x) dx$ לפונקציה בשני משתנים, $f(x, y)$. המוטיבציה מאחורי אינטגרל מסוים $\int_a^b f(x) dx$ הייתה הגדרה של שטח בין הגרף לבין ציר ה- x . באופן אנלוגי אפשר לחשוב על $\iint_D f(x, y) dx dy$ בתור נפח בין הגרף לבין מישור xy .

כרגיל, "מתחת" רלוונטי רק ל- $f(x, y) \geq 0$ אבל בכל דוגמה יהיה ברור לאיזה נפח הכוונה, כאשר נפח מתחת למישור xy נספר בסימן שלילי.

נראה שיש גם דרכים אחרות לחשוב על האינטגרל הכפול, שאינן קשורות לנפח.

ישנו קושי נוסף שלא היה קיים במקרה של משתנה יחיד: תחום האינטגרציה. ישנו גיוון של תחומי אינטגרציה אפשריים, שאת חלקם נפסול אבל כמעט כל תחום שניתקל בו "ברחוב" יצטרך להיות מתאים לאינטגרציה.

נטפל ברובד הנוסף הזה בשני שלבים: קודם נתעסק רק בהכללה פשוטה של קטע, מלבן: $R = [a, b] \times [c, d]$, ולאחר מכן נכליל לתחומים כלליים יותר.

יש שתי דרכים עיקריות להגדיר חלוקה של מלבן כדי ליצור קירובים של הנפח הרצוי באמצעות סכומי דרבו ורימן: אחת היא לאפשר חלוקה כללית לתתי-מלבנים קטנים שדומים ל- R , והשניה היא לאפשר רק חלוקות רגולריות.

אנחנו נאפשר רק חלוקות רגולריות, אבל אין דרך שטובה מהאחרת.

הגדרה: חלוקה P של מלבן $R = [a, b] \times [c, d]$ היא זוג חלוקות, אחת

$$P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

של הקטע $[a, b]$ והשניה

$$P_2 = \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d\}$$

של הקטע $[c, d]$.

המלבן ה- ij בחלוקה P הוא

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

נגדיר את פרמטר החלוקה P להיות המקסימלי מבין שתי החלוקות החד-ממדיות:

$$\ell(P) = \max\{\ell(P_1), \ell(P_2)\}$$

הגדרת האינטגרליות

בהינתן חלוקה P של המלבן R ובחירה של נקודות ביניים עבור P מהצורה (s_i, t_j) כאשר $x_{i-1} \leq s_i \leq x_i$ ו- $y_{j-1} \leq t_j \leq y_j$, סכום רימן המתאים הוא

$$\sum_{i,j} f(s_i, t_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

הגדרה: תהי $f(x, y)$ מוגדרת במלבן $R = [a, b] \times [c, d]$. נאמר כי $f(x, y)$ אינטגרלית ב- R אם קיים מספר $I \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים תנאי רימן לאינטגרליות:

לכל $\epsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה P של המלבן R שמקיימת $\ell(P) < \delta$, ולכל בחירה של נקודות ביניים עבור P מהצורה (s_i, t_j) כאשר $x_{i-1} \leq s_i \leq x_i$ ו- $y_{j-1} \leq t_j \leq y_j$, מתקיים כי

$$\left| \sum_{i,j} f(s_i, t_j) \Delta x_i \Delta y_j - I \right| < \epsilon$$

במקרה זה, המספר I מכונה האינטגרל הכפול של f מעל המלבן R ומסומן

$$I = \iint_R f \equiv \iint_R f(x, y) dx dy$$

הערה: אפשר להוכיח שאם מתקיים תנאי רימן לאינטגרליות אז I יחיד.

משפט 1. אם f אינטגרלית רימן במלבן R אז היא חסומה ב- R .

תכונות יסודיות של אינטגרל כפול במלבן

אינטגרל כפול על מלבן הוא כאמור אנלוגי לאינטגרל חד-ממדי, ותכונותיו ניתנות להוכחה באופן אנלוגי גם כן. הנה הן:

משפט 2: יהי $R = [a, b] \times [c, d]$ מלבן.

1. לינאריות: אם $f(x, y)$ ו- $g(x, y)$ אינטגרליות במלבן R , אז לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים ש- $\alpha f(x, y) + g(x, y)$ אינטגרלית ב- R ו-

$$\iint_R (\alpha f(x, y) + g(x, y)) dx dy = \alpha \iint_R f(x, y) dx dy + \iint_R g(x, y) dx dy$$

2. אינטגרליות של הרכבה: אם $f(x, y)$ אינטגרלית במלבן R ו- $c \leq f(x, y) \leq d$ לכל $(x, y) \in R$, ואם $\varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה, אז ההרכבה $\varphi(f(x, y))$ אינטגרלית במלבן R .

3. אינטגרליות של חזקה טבעית: אם $f(x, y)$ אינטגרלית במלבן R , אז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים ש- $f(x, y)^n$ אינטגרלית במלבן R .

בנוסף, אם f חסומה מן האפס: $\inf_R |f| > 0$, אז $\frac{1}{f}$ אינטגרלית במלבן R .

4. אינטגרביליות של מכפלה: אם $f(x, y)$ ו- $g(x, y)$ אינטגרביליות במלבן R , אז המכפלה $f(x, y)g(x, y)$ אינטגרבילית במלבן R .

5. מונוטוניות: אם $f(x, y) \leq g(x, y)$ אינטגרביליות במלבן R , אז $\iint_R f \leq \iint_R g$.
זה נכון גם עבור אי שוויון חזק $<$ בתנאי שהוא מתקיים בכל המלבן.

6. אי-שוויון המשולש האינטגרלי: אם $f(x, y)$ אינטגרבילית במלבן R , אז גם ערכה המוחלט $|f(x, y)|$ פונקציה אינטגרבילית במלבן R . בנוסף,

$$\left| \iint_R f(x, y) \, dx dy \right| \leq \iint_R |f(x, y)| \, dx dy$$

7. משפט ההערכה: אם $f(x, y)$ אינטגרבילית במלבן R , ולכל $(x, y) \in R$ מתקיים $m \leq f(x, y) \leq M$, אז

$$m(b-a)(d-c) \leq \iint_R f(x, y) \, dx dy \leq M(b-a)(d-c)$$

הקשר בין רציפות לבין אינטגרביליות

משפט 3. אם $f(x, y)$ רציפה במלבן R אז היא אינטגרבילית בו.

ההוכחה דומה למקרה החד ממדי, בעזרת רציפות במידה שווה.
חשוב לזכור שהמשפט הנ"ל אינו שקילות, כלומר, יתכן בהחלט שפונקציה תהיה אינטגרבילית מבלי שהיא תהיה רציפה.
בכל זאת, קיימת שקילות לא לגמרי פשוטה.

הגדרה: קבוצה $A \subset \mathbb{R}^2$ היא ממידה אפס אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים כיסוי של A על ידי סדרת מלבנים אשר סכום שטחיהם קטן מ- ε . כלומר, קיימת סדרת מלבנים $R_1, R_2, \dots$ עבורם $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$ וכן

$$\sum_{k=1}^{\infty} (d_k - c_k)(b_k - a_k) < \varepsilon$$

כאשר $R_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]$.

הגדרה זו תקפה באותו אופן עבור מימד כללי: $A \subset \mathbb{R}^n$, עם תיבות n מימדיות במקום מלבנים.
הקשר המדויק בין רציפות לבין אינטגרביליות מגולם במשפט הבא. ההוכחה של המשפט לא קלה, ולא נכסה אותה.

משפט 4: תהי f חסומה במלבן R . אז f אינטגרבילית ב- R אם ורק אם קבוצת נקודות אי הרציפות של f היא ממידה אפס.

ניסוח משפט פוביני ודוגמה

דוגמה: איך מחשבים אינטגרל? למשל,

$$I = \iint_{[0,1] \times [2,3]} x^2 y \, dx \, dy$$

יש תשובה מתבקשת, גם בלי לחשוב הרבה על הצדקה אינטואיטיבית וגיאומטרית:

$$I = \int_0^1 \left(\int_2^3 x^2 y \, dy \right) dx = \frac{5}{6}$$

כלומר, אינטגרל נשנה.

זה תואם לכך שביצוע אינטגרל נשנה הוא בעצם סריקה של כל המלבן לפי איזשהו סדר. חשבו על מכסחת דשא שצריכה לטפל במלבן כולו.

האינטגרלים

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx, \quad \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy$$

מכונים **אינטגרלים נשנים**. מדובר בכל פעם בזוג אינטגרלים במשתנים יחיד (הפנימי עם פרמטר) שלכן יש אפשר לחשב לרוב למשל את נוסחת ניוטון לייבניץ.

המשפט שמאפשר לנו לחשב אינטגרל כפול על מלבן באופן הזה הוא משפט חשוב במתמטיקה, שיש לו הכללות רבות ושימוש יומיומי בכל תחום מדעי והנדסי. הוא מכונה **משפט פוביני**.

משפט 5. תהי $f(x, y)$ אינטגרלית במלבן $R = [a, b] \times [c, d]$. אז לכל $x \in [a, b]$ פרט לקבוצה בעלת מידה 0 מתקיים שהפונקציה $f(x, y)$ אינטגרלית בקטע $[c, d]$. בנוסף, הפונקציה $\int_c^d f(x, y) \, dy$ אינטגרלית בקטע $[a, b]$, ו-

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx$$

הערות:

- הפונקציה $\int_c^d f(x, y) \, dy$ מוגדרת פרט אולי לקבוצת x -ים שמידתה 0. זה לא משפיע על האינטגרל ולכן האמירה העוקבת שהיא אינטגרלית בקטע $[a, b]$, הגיונית.
- ברוב המקרים f תהיה רציפה ולכן לכל $x \in [a, b]$ נקבל שהפונקציה $\int_c^d f(x, y) \, dy$ אינטגרלית בקטע $[a, b]$.
- הכל נכון כמובן גם בסדר אינטגרציה הפוך, ובסך הכל ברוב המקרים נקבל:

$$\iint_R f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy$$

זה נקרא **היפוך סדר אינטגרציה**.

ניעזר בסכומי רימן כדי להבין מאיפה בא המשפט:

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &\approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(s_i, t_j) \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m f(s_i, t_j) \Delta y_j \right) \Delta x_i \\ &\approx \sum_{i=1}^n \left(\int_c^d f(s_i, y) dy \right) \Delta x_i \approx \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

בכל שלב קירוב $\approx$ זיהינו בין אינטגרל לבין סכום רימן אשר מתאים לו.

דוגמה: נעשה דוגמה מעט מטופשת. בהמשך, נישען על דוגמה זו כדי להגדיר מושג חשוב. נחשב

$$\iint_R 1 dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d 1 dy \right) dx = \int_a^b y \Big|_{y=c}^{y=d} dx = \int_a^b (d - c) dx = (d - c)(b - a)$$

כלומר, קיבלנו את השטח של R .

1.2 קבוצות ג'ורדן

הגדרה ואפיון של קבוצות ג'ורדן

אינטגרציה של פונקציות במלבן בלבד אינה מספקת. נרצה לאפשר אינטגרציה בעיגול, אליפסה, משולש או כל צורה סבירה: $\iint_D f$ כאשר D היא **קבוצת ג'ורדן**, שנגדיר מיד. נעשה זאת על ידי קביעה מלבן R אשר מכיל את D והרחבת f באזור $R \setminus D$ להיות 0 באופן זהותי.

הבעיה שיכולה להיווצר, היא שבאופן זה כל נקודות השפה של D עלולות להיות נקודות אי רציפות של הפונקציה המורחבת. היות שראינו כי פונקציה היא אינטגרבילית במלבן אם אין לה יותר מדי אי רציפויות, אסור שהשפה של D תהיה גדולה מדי.

יתברר שמספיק כי התהליך הנ"ל יעבוד עבור הפונקציה $f(x, y) \equiv 1$. הרחבת 1 מחוץ ל- D על ידי הערך 0 נותנת פונקציה חשובה באופן כללי.

הגדרה: תהי $D \subset \mathbb{R}^2$. הפונקציה המציינת של D מוגדרת על ידי

$$\chi_D(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

אם D חסומה, נאמר שהיא **קבוצת ג'ורדן** אם קיים מלבן R אשר מכיל את D כך שהפונקציה המציינת χ_D אינטגרבילית ב- R . במקרה זה נגדיר את השטח של D על ידי

$$|D| = \iint_R \chi_D(x, y) dx dy$$

הלמה הבאה מתייחסת לקונסיסטנטיות בהגדרה.

למה 6: אם D היא קבוצת ג'ורדן, אז לכל מלבן R אשר מכיל אותה מתקיים כי χ_D אינטגרבילית ב- R . בנוסף, הערך $\iint_R \chi_D$ אינו תלוי בבחירת המלבן.

הערה: הגדרנו לא מזמן את המושג של קבוצה בעלת מידה 0. יש הבדל בין שטח אפס לבין מידה אפס. ניתן להוכיח שקבוצה A היא קבוצת ג'ורדן בעלת שטח אפס אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים כיסוי של A על ידי סדרה סופית של מלבנים אשר סכום שטחיהם קטן מ- ε . כלומר, קיימת סדרת מלבנים $R_1, R_2, \dots, R_N$ עבורם $A \subset \bigcup_{k=1}^N R_k$ וכן

$$\sum_{k=1}^N (d_k - c_k)(b_k - a_k) < \varepsilon$$

כאשר $R_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]$.

משפט 7: תהי D קבוצה חסומה. אז D היא קבוצת ג'ורדן אם ורק אם לשפה ∂D יש שטח אפס.

הערה: השפה של D קומפקטית (סגורה וחסומה) וניתן להוכיח שבמקרה כזה, היא בעלת שטח אפס אם ורק אם היא בעלת מידה אפס.

זיהוי של קבוצות בעלות שטח אפס

אנחנו נרצה דרך מהירה לזהות קבוצות בעלות שטח אפס, כדי לא להתעסק יותר מדי עם השאלה "האם D קבוצת ג'ורדן?" בשגרה של חישובי נפחים. המשפט הבא מכסה כמעט כל דוגמה שניתקל בה:

משפט 8:

1. נניח ש- A_1 ו- A_2 קבוצות בעלות שטח אפס. אז $A_1 \cup A_2$ בעלת שטח אפס.

2. נניח ש- D_1 ו- D_2 קבוצות ג'ורדן. אז $D_1 \cup D_2$ קבוצת ג'ורדן.

3. תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן. אז הגרף שלה

$$G = \{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\}$$

בעל שטח אפס.

זה ברור שאיחוד של שתי קבוצות בעלות שטח אפס היא קבוצה בעלת שטח אפס, וכמעט כל תחום שניתקל בו יהיה כזה ששפתו איחוד של כמה גרפים של פונקציות רציפות. לכן תחומים אלו יהיו קבוצות ג'ורדן.

דוגמאות:

1. עיגול היחידה הוא קבוצת ג'ורדן, כי שפתו איחוד של שני גרפים של פונקציות:

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

2. מלבן הוא קבוצת ג'ורדן כי שפתו מורכבת מארבעה קווים ישרים, כל אחד גרף של פונקציה (אמנם שניים מהם גרפים של פונקציות הפוכות).

מוסכמה: אם אין דרישה מפורשת, אז אין צורך להוכיח שקבוצת ג'ורדן היא אכן כזו, אלא מספיק לציין שהיא כזו. אבל, באחריות מי שטוען שהיא כזו, שהיא אכן תהיה כזו.

הגדרה, ניסוח הקונסיסטנטיות, ומוגדרות היטב

נוכל כעת להגדיר אינטגרל על תחום כללי יותר ממלבן: קבוצת ג'ורדן.

הגדרה: תהי D קבוצת ג'ורדן, תהי $f(x, y)$ מוגדרת ב- D , ויהי R מלבן שמכיל את D . נסמן

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

נאמר ש- $f(x, y)$ אינטגרלית ב- D אם $\tilde{f}(x, y)$ אינטגרלית ב- R , ובמקרה זה נגדיר את אינטגרל רימן ב- D (האינטגרל הכפול) על ידי

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_R \tilde{f}(x, y) \, dx \, dy$$

במבט ראשון, ההגדרה לא מושלמת. בעיה ראשונה שבולטת לעין היא שיש כביכול תלות במלבן המכיל R . אינטואיטיבית, לא צריכה להיות. אבל את זה צריך להוכיח.

בעיה שניה, פחות בולטת אבל קשורה, היא שיש לנו כבר הגדרה למקרה ש- D עצמו מלבן. האם ההכללה הנ"ל היא באמת הכללה?

למה 9: תהי $f(x, y)$ מוגדרת במלבן R , ויהי R' מלבן שמכיל את R . אז הפונקציה

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in R, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

אינטגרלית ב- R' אם ורק אם $f(x, y)$ אינטגרלית ב- R , והאינטגרלים שווים:

$$\iint_{R'} \tilde{f}(x, y) \, dx \, dy = \iint_R f(x, y) \, dx \, dy$$

מסקנה: האינטגרל הכפול של $f(x, y)$ על קבוצת ג'ורדן הוא מוגדר היטב, כלומר, לא תלוי בבחירת המלבן החוסם R של D .

זה נובע מיד מהלמה, כי הפעולה של המשכה על ידי 0 מחוץ ל- D ($\tilde{f}$) היא פעולה שאם עושים אותה שוב מ- R שמכיל את D למלבן גדול יותר, אז מקבלים את אותה תוצאה בדיוק $\tilde{f}$.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. תכונות בסיסיות של אינטגרל רימן חד ממדי $\int_a^b f(x) \, dx$.

“ As is known, scientific physics dates its existence from the discovery of the differential calculus. ”

Bernhard Riemann