

הרצאה 13: פולינום טיילור, בעיות קיצון ותבניות ריבועיות

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1 פולינום טיילור ובעיות קיצון
2	1.1 פולינום טיילור
4	1.2 משפט פרמה
6	1.3 תבניות ריבועיות וההסיאן



פולינום טיילור ובעיות קיצון

1.1 פולינום טיילור

פולינום טיילור

בהינתן נקודה קריטית a של פונקציה במשתנה יחיד $f(x)$, פיתוח טיילור

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + R_2(x)$$

מראה שאם $f''(a) > 0$ אז $x = a$ היא נקודת מינימום מקומי, ואם $f''(a) < 0$ אז מקסימום מקומי.

כדי להבין נקודות קיצון מקומיות אנחנו נזדקק כמו במשתנה יחיד לפיתוח טיילור עבור $f(x, y)$ (או $f(x, y, z)$), ודרך לבדוק שהסדר השני בפיתוח הוא חיובי לכל x, y .

נניח זמנית לצורך פשטות הכתיבה ש- $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

תהי $f(x, y)$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר 2 בנקודה $(0, 0)$. נחפש ייצוג

$$f(x, y) = \{ \text{פולינום ממעלה } \geq 2 \} + \text{שארית זניחה}$$

ניקח נקודה (x, y) בסביבת הראשית שתהיה קבועה לכל אורך החישובים הבאים.

היות שיש לנו פיתוח טיילור עבור פונקציות של משתנה אחד בלבד, נצמצם את הפונקציה לישר המחבר בין הראשית לבין הנקודה (x, y) . נסמן

$$(a, b) := \frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ונגדיר

$$g(t) := f(ta, tb)$$

כלומר, בינתיים אנו מתעסקים בנקודות אשר נמצאות בכיוון של (x, y) בלבד.

אם $t = 0$ אז נקבל $g(0) = f(0, 0)$.

אם $t = \sqrt{x^2 + y^2}$ אז נקבל $g(t) = f(x, y)$.

נחשב פיתוח טיילור מסדר 2 של g סביב $t = 0$ ונציב בו $t = \sqrt{x^2 + y^2}$. פיתוח זה הוא

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(0)t^2 + R_2(t) \quad (1)$$

נחשב את הנגזרות בעזרת כלל השרשרת:

$$\begin{cases} g(0) = f(0, 0) \\ g'(0) = f_x(0, 0) \cdot a + f_y(0, 0) \cdot b \\ g''(0) = (f_{xx}(0, 0)a + f_{xy}(0, 0)b)a + (f_{yx}(0, 0)a + f_{yy}(0, 0)b)b \end{cases}$$

נציב את הערכים הללו לתוך פיתוח טיילור (1) של g ונקבל

$$f(ta, tb) = g(t) = f(0, 0) + (f_x(0, 0)a + f_y(0, 0)b)t + \frac{1}{2}(f_{xx}(0, 0)a^2 + 2f_{xy}(0, 0)ab + f_{yy}(0, 0)b^2)t^2 + R_2(t)$$

נציב $t = \sqrt{x^2 + y^2}$. היות ש- $ta = x$ ו- $tb = y$, נקבל

$$f(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2}(f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2) + R_2(x, y)$$

זה מכונה **פיתוח טיילור מסדר שני** של f סביב הראשית.

בנוסף, $\frac{R_2(t)}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ ולכן עבור הכיוון הקבוע של (x, y) : $\frac{R_2(x, y)}{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$

משפט טיילור

הדיון הנ"ל הוא כמעט ההוכחה של המשפט הבא (הפער הוא שצריך לשלוט על השארית באופן אחיד בלי תלות בכיוון):

משפט 1: תהי $f(x, y)$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר 2 בסביבת הנקודה (x_0, y_0) . אז

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}(f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2) + R_2(x, y)$$

כאשר $\frac{R_2(x, y)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} 0$

הערה: באופן דומה ניתן לחשב פיתוח טיילור מסדר גבוה יותר. המחובר ה- n הוא אז

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^k \cdot (y - y_0)^{n-k}$$

דוגמה: נכתוב את פיתוח טיילור מסדר 2 של $f(x, y) = \sin(xy)$ סביב הנקודה $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

נחשב נגזרות חלקיות:

$$\begin{cases} f_x = y \cos(xy) \\ f_y = x \cos(xy) \\ f_{xx} = -y^2 \sin(xy) \\ f_{yy} = -x^2 \sin(xy) \\ f_{xy} = \cos(xy) - xy \sin(xy) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x(1, 2) = 2 \cos 2 \\ f_y(1, 2) = \cos 2 \\ f_{xx}(1, 2) = -4 \sin 2 \\ f_{yy}(1, 2) = -\sin 2 \\ f_{xy}(1, 2) = \cos 2 - 2 \sin 2 \end{cases}$$

לכן פיתוח טיילור הוא

$$\sin(xy) = \sin 2 + 2 \cos 2 (x - 1) + \cos 2 (y - 2) + \frac{1}{2} (-4 \sin 2 (x - 1)^2 + 2 (\cos 2 - 2 \sin 2) (x - 1) (y - 2) - \sin 2 (y - 2)^2) + R_2(x, y)$$

כאשר

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{R_2(x, y)}{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} = 0$$

פולינום ומשפט טיילור בשלושה משתנים

משפט 2: תהי $f(x, y, z)$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר 2 בסביבת הנקודה (x_0, y_0, z_0) . אז

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & f(x_0, y_0, z_0) + f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) \\ & + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) \\ & + \frac{1}{2} \left(f_{xx}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)^2 + f_{yy}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)^2 + f_{zz}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)^2 \right. \\ & + 2f_{xy}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)(y - y_0) + 2f_{xz}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)(z - z_0) \\ & \left. + 2f_{yz}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)(z - z_0) \right) + R_2(x, y, z) \end{aligned}$$

$$\text{כאשר } \lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} \frac{R_2(x,y,z)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = 0$$

הערה: באופן דומה ניתן לחשב פיתוח טיילור מסדר גבוה יותר:

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \frac{\partial^m f}{\partial^l x \partial^{m-l} y}(a, b) (x - a)^l (y - b)^{m-l} + R_k(x, y)$$

1.2 משפט פרמה

נקודות קיצון מוחלטות ומקומיות

תזכורת: אם $f(x)$ מוגדרת בקטע $[a, b]$, אז ניתן למצוא מינימום/מקסימום ל- f על ידי:

- מקומי: מוצאים נקודות קריטיות ($f'(x_0) = 0$) או אי-גזירות בקטע הפתוח (a, b) ובודקים את הסימן של $f''(x_0)$ (חיובי מינימום, שלילי מקסימום).
- גלובלי: מוצאים/אוספים נקודות חשודות (קריטיות, שפה - a, b , אי-גזירות) ומשווים בין ערכי f בנקודות אלו.

נכון לשיטות מקבילות עבור פונקציות של מספר משתנים.

דוגמה: הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2$ ב- $\mathbb{R}^2$.

- אין מקסימום גלובלי כי $f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow \infty} \infty$.
- יש מינימום גלובלי כי $f(x, y) > 0$ לכל $(x, y) \neq (0, 0)$ ו- $f(0, 0) = 0$.
- אין מקסימום מקומי כי "בכל נקודה יש כיווני עלייה".
- יש מינימום מקומי רק בראשית כי "בכל נקודה אחרת יש כיווני ירידה".

הגדרה: תהי $f(x, y, z)$ מוגדרת בקבוצה A .

- נקודה $(x_0, y_0, z_0) \in A$ נקראת נקודת מקסימום (גלובלי) של f ב- A אם לכל $(x, y, z) \in A$ מתקיים $f(x, y, z) \leq f(x_0, y_0, z_0)$.
- באופן דומה, הנקודה $(x_0, y_0, z_0) \in A$ נקראת נקודת מינימום (גלובלי) של f ב- A אם לכל $(x, y, z) \in A$ מתקיים $f(x, y, z) \geq f(x_0, y_0, z_0)$.
- נקודה $(x_0, y_0, z_0) \in D$ נקראת נקודת מקסימום מקומי של f ב- A אם קיים $\delta > 0$ כך שלכל $(x, y, z) \in A$ אשר מקיימת כי

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$$

מתקיים כי $f(x, y, z) \leq f(x_0, y_0, z_0)$.

באופן דומה, מינימום מקומי ב- A . כלומר, קיימת סביבה של (x_0, y_0, z_0) שבה היא קיצון מוחלט.

כנ"ל עבור פונקציה בשני משתנים.

משפט פרמה

המשפט הבא הוא האנלוג לתנאי $f'(x_0) = 0$ מתוך התזכורת עבור פונקציות במשתנה אחד, שהוא **משפט פרמה:**

משפט 3: תהי $f(x, y, z)$ מוגדרת בתחום D ונניח ש- (x_0, y_0, z_0) היא נקודת קיצון מקומי של f . אם הנגזרות החלקיות של f קיימות בנקודה (x_0, y_0, z_0) אז $\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) = \vec{0}$.

כלומר,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

דוגמה: עבור $f(x, y) = x^2 + y^2$ מתקיים כי $\vec{\nabla} f = (2x, 2y) = (0, 0)$ אם $(x, y) = (0, 0)$. לכן אין נקודות קיצון מקומי פרט לראשית.

הערה: זהו תנאי הכרחי לכך שנקודה היא קיצון מקומי, אבל לא תנאי מספיק. זה היה המצב כבר עבור פונקציות של משתנה אחד. למשל, $f(x) = x^3$ ו- $x_0 = 0$.

נקודות קריטיות ונקודות אוכף

הגדרה: תהי f מוגדרת בסביבת הנקודה (x_0, y_0, z_0) . נאמר שהנקודה $(x_0, y_0, z_0) \in D$ היא נקודה קריטית של f אם הנגזרות החלקיות של f קיימות בנקודה וכן $\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) = \vec{0}$.

לכן הנקודות החשודות לקיצון בתוך תחום D (כלומר, בינתיים בלי לדבר על נקודות שפה) הן:

1. נקודות קריטיות.

2. נקודות שבהן לא מתקיים שכל הנגזרות החלקיות קיימות.

לכן אם D תחום (חסום), איך מוצאים נקודות קיצון של $f(x, y, z)$ ב- $\bar{D}$?

• מקומי: מוצאים נקודות חשודות, ואז צריך למיין אותן (להחליט מי מינימום/מקסימום/לא קיצון). האם יש אנלוג לבדיקת הסימן של $f''(x_0)$?

• גלובלי: אוספים נקודות חשודות (קריטיות, שפה ואי-גזירות) ומשווים - אבל השפה היא כבר לא 2 נקודות, אלא אינסופית. לכן יש למצוא "נקודות חשודות על השפה". לצורך כך נלמד בעתיד את שיטת כופלי לגרנז', אך בינתיים נדחה את הדיון במציאת קיצון גלובלי.

הערה: בכל מקרה, אם לא ידוע שקיים קיצון מוחלט בקבוצה, אז אסור להשוות את ערכי f בנקודות החשודות ולבחור מביניהן מינימום ומקסימום.

הדרך הנפוצה ביותר לדעת שקיים קיצון מוחלט היא בעזרת משפט וירשטראס, כלומר, אם מדובר בפונקציה רציפה בקבוצה סגורה וחסומה. מסיבה זו נדחה את הדיון בקיצון מוחלט עד שנבין איך למצוא נקודות חשודות על השפה.

הגדרה: נתונה פונקציה $f(x, y, z)$ גזירה בתחום D , ותהי $(x_0, y_0, z_0) \in D$ נקודה קריטית. נאמר ש- (x_0, y_0, z_0) נקודת אוכף אם היא אינה נקודת קיצון מקומי (למרות היותה נקודה קריטית).

הערה: כלומר, נקודת אוכף היא נקודה קריטית שבכל סביבה שלה יש נקודות שבהן הפונקציה יותר גדולה, וכן נקודות שבהן הפונקציה יותר קטנה.

דוגמה: הפרבולואיד ההיפרבולי (שקראנו לו גם "אוכף") מתואר על ידי $z = x^2 - y^2$, כלומר, זהו הגרף של $f(x, y) = x^2 - y^2$.

כאן $\vec{\nabla} f = (2x, -2y)$ ולכן יש נקודה קריטית אחת: $(0, 0)$.

זו לא נקודת מקסימום מקומי כי $f(x, 0) > 0 = f(0, 0)$ לכל x .

זו לא נקודת מינימום מקומי כי $f(0, y) < 0 = f(0, 0)$ לכל y .

לכן זו נקודת אוכף.

1.3 תבניות ריבועיות וההסיאן

מבוא למיון של נקודות קריטיות במספר משתנים

בהינתן נקודה קריטית (x_0, y_0) , כיצד ניתן לקבוע אם ל- f יש בנקודה מינימום מקומי / מקסימום מקומי / אוקף?

הרעיון: במשתנה אחד, מדוע התנאי $f''(x_0) > 0$ עבור נקודה קריטית מספיק כדי לקבוע שהנקודה היא נקודת מינימום מקומי? כי ניתן לכתוב פיתוח טיילור של הפונקציה:

$$f(x) = f(x_0) + 0 + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + R_2(x)$$

משפט טיילור עבור השארית בצורת פיאונו מבטיח אז כי

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_2(x)}{(x - x_0)^2} = 0$$

ולכן השארית זניחה בהשוואה אל המחובר $\frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$ אם $f''(x_0) \neq 0$

לכן אם $f''(x_0) > 0$ אז הסדר השני בפיתוח חיובי לכל $x \neq x_0$, ולכן אם $x \neq x_0$ קרוב מספיק ל- x_0 כך שהשארית זניחה, אז $f(x) > f(x_0)$.

באותו אופן מתקבל גם "מבחן הנגזרת ה- n " במקרה ש- n זוגי, בעזרת פיתוח טיילור מסדר n .

עבור שני משתנים, נניח כי $f \in C^2$. אם $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \vec{0}$ אז פיתוח טיילור מסדר שני הוא:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \left(f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right) + R_2(x, y)$$

נשאלות באופן טבעי שתי שאלות:

1. האם יש תנאי פשוט לבדיקה שיבטיח שהסדר השני הוא חיובי לכל $(x, y) \neq (x_0, y_0)$?

2. אם כן, האם השארית תהיה מספיק זניחה כדי לא להשפיע על הסימן?

אנחנו נראה שהתשובות לשתי השאלות הללו היא כן. כדי לענות על הראשונה, יש לחקור את הביטוי

$$f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)x(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)y^2$$

נראה שבמובן מסוים, אם הביטוי "חיובי", אז הנקודה היא מינימום; אם "שלילי", אז מקסימום; ואחרת, מצריך בירור נוסף.

תבניות ריבועיות

זה מוביל אותנו למספר הגדרות ומושגים אלגבריים:

הגדרה:

1. תבנית ריבועית היא פונקציה מהצורה

$$h(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

כאשר $A, B, C \in \mathbb{R}$.

2. תבנית ריבועית היא מוגדרת חיובית אם לכל $(x, y) \neq (0, 0)$ מתקיים

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 > 0$$

3. תבנית ריבועית היא מוגדרת אי שלילית אם לכל (x, y) מתקיים

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \geq 0$$

4. תבנית ריבועית היא מוגדרת שלילית אם לכל $(x, y) \neq (0, 0)$ מתקיים

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 < 0$$

5. תבנית ריבועית היא מוגדרת אי חיובית אם לכל (x, y) מתקיים

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \leq 0$$

דוגמאות:

1. מוגדרת חיובית: $h(x, y) = x^2 + y^2$.

2. מוגדרת שלילית: $h(x, y) = -x^2 - y^2$.

3. מוגדרת אי שלילית: כל תבנית מוגדרת חיובית כמו $x^2 + y^2$, וגם למשל

$$h(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

או

$$h(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

בשני המקרים יש ערכים לא טריוויאליים x, y שמאפסים את $h(x, y)$ ולכן היא לא מוגדרת חיובית.

4. מוגדרת אי חיובית: כל תבנית מוגדרת שלילית כמו $-x^2 - y^2$, וגם למשל

$$h(x, y) = -x^2 + 2xy - y^2 = -(x - y)^2$$

5. אף אחד מהנ"ל: $h(x, y) = x^2 - 4xy + y^2$.

למשל, $h(1, 1) = -4 < 0$ אבל $h(-1, 1) = 6 > 0$.

אנחנו נראה שמוגדרת חיובית גורר מינימום, מוגדרת שלילית גורר מקסימום, מוגדרת אי שלילית פוסל מקסימום, מוגדרת אי חיובית פוסל מינימום, ואף אחד מהנ"ל גורר אוקף.

מטריצה סימטרית של תבנית ריבועית וההסיאן

הסדר השני בפיתוח טיילור הוא תבנית ריבועית, עם

$$A = f_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f_{yy}(x_0, y_0)$$

לכן השאלה הראשונה ניתנת לניסוח מחדש: האם יש תנאי פשוט לבדיקה שיבטיח שהסדר השני בפיתוח טיילור הוא תבנית ריבועית מוגדרת חיובית?

אנחנו נראה שהתשובה חיובית, בתנאי שנעזרים במטריצה כדי לכתוב את התבנית.

הגדרה: המטריצה הסימטרית שמתאימה לתבנית הריבועית היא המטריצה

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

לא קשה לבדוק כי

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

כלומר, תבנית ריבועית ניתנת לייצוג על ידי מטריצה סימטרית.

דוגמאות:

1. עבור $h(x, y) = x^2 + y^2$,

$$.H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. עבור $h(x, y) = -x^2 - y^2$,

$$.H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. עבור $h(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$,

$$.H = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. עבור $h(x, y) = x^2 - 4xy + y^2$,

$$.H = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. ניקח למשל $h(x, y) = 3x^2 - xy + y^2$.

$$.H = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

הערה: שוויון אלגברי שקל לבדוק: $\vec{u}^t H \vec{u} = (H \vec{u}) \cdot \vec{u}$.

הגדרה: תהי $f(x, y)$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות מסדר שני בנקודה (x_0, y_0) .

מטריצת ההסיאן של הפונקציה היא המטריצה

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

באופן דומה, עבור פונקציה $f(x, y, z)$,

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

לפי משפט שוורץ, אם $f \in C^2$ אז ההסיאן הוא מטריצה סימטרית, והיא המטריצה הסימטרית שמתאימה לתבנית הריבועית בסדר שני של פיתוח טיילור.

מטריצות מוגדרות חיובית ושליט

הגדרה: תהי H מטריצה סימטרית.

1. נאמר כי H היא מוגדרת חיובית אם לכל $\vec{u} \neq \vec{0}$ מתקיים
 $\vec{u}^t H \vec{u} > 0$

2. נאמר כי H היא מוגדרת אי שלילית אם לכל $\vec{u}$ מתקיים
 $\vec{u}^t H \vec{u} \geq 0$

3. נאמר כי H היא מוגדרת שלילית אם לכל $\vec{u} \neq \vec{0}$ מתקיים
 $\vec{u}^t H \vec{u} < 0$

4. נאמר כי H היא מוגדרת אי חיובית אם לכל $\vec{u}$ מתקיים
 $\vec{u}^t H \vec{u} \leq 0$

כלומר, תבנית ריבועית היא מוגדרת חיובית אם"ם המטריצה הסימטרית שמתאימה לה היא מוגדרת חיובית. נוכל אם כן לבדוק אם פיתוח טיילור מסדר 2 מוגדר חיובית דרך המטריצה המתאימה לו.

מימדים גבוהים

כל ההגדרות הנ"ל הן כנ"ל עבור $h(x, y, z)$ ומטריצות סימטריות 3×3 , וכן עבור $n \times n$.

דוגמה: ניקח למשל

$$h(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + xz + 3xy$$

המטריצה הסימטרית המתאימה היא

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:
 1. ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של מטריצה בכלל ושל מטריצה סימטרית בפרט.

“ And perhaps, posterity will thank me for having shown it that the ancients did not know everything.

”

Pierre de Fermat