

הרצאה 12: משפט הפונקציות הסתומות

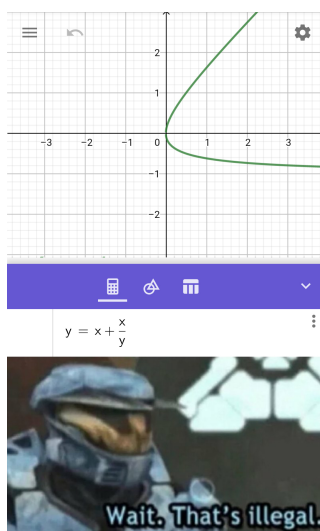
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1	משפט הפונקציות הסתומות
2	1.1	משפט הפונקציות הסתומות עבור $F(x, y) = 0$
4	1.2	הכללות של משפט הפונקציות הסתומות



משפט הפונקציות הסתומות

1

1.1 משפט הפונקציות הסתומות עבור $F(x, y) = 0$

חילוף ובעיות אפשריות

הבעיה של חילוף פונקציה סתומה צצה בכל מיני מצבים.

באופן בסיסי נתונה משוואה כמו $F(x, y) = 0$, ורוצים לחלץ ממנה את y כפונקציה של x . כלומר, רוצים לחלץ $y(x)$ מתוך המשוואה.

דוגמאות:

1. אם המשוואה היא $x + y = 0$ אז זה קל: $y = -x$.
 2. אם המשוואה היא $x^2 + 3y^2 = -3$ אז אין פתרונות למשוואה ולכן אין כל טעם לדבר על חילוף של y .
 3. אם המשוואה היא $x^2 + y^2 = 1$ אז עבור $x_0 = 1$ יש ערך $y_0 = 0$ יחיד מתאים, אבל יש כאן שתי תקלות שיהיו נוראיות בהקשר של משפט הפונקציות הסתומות. ראשית, בכל סביבה של $x_0 = 1$ יש נקודות $x > 1$ שעבורן אין אף y מתאים. שנית, בכל סביבה של $y_0 = 0$ יש לכל $x \neq 1$ שקרוב ל- $x_0 = 1$ שני ערכי y מתאימים, הלא הם $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. תקלת בונוס: החילוף (ובעצם, החילוצים) $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ אינם גזירים בנקודה $x_0 = 1$.
- משפט הפונקציות הסתומות יבטיח שתחת תנאים מסוימים, יש סביבה של x_0 וסביבה של y_0 שביחס אליהן קיים לכל x ערך y יחיד.

ניסוח משפט הפונקציות הסתומות עבור חילוף של y מתוך $F(x, y) = 0$ ודוגמאות

משפט 1: תהי $F(x, y)$ גזירה ברציפות (כלומר, $\frac{\partial F}{\partial x}$ ו- $\frac{\partial F}{\partial y}$ קיימות ורציפות) בסביבת הנקודה (x_0, y_0) .

נניח כי $F(x_0, y_0) = 0$ וכן $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

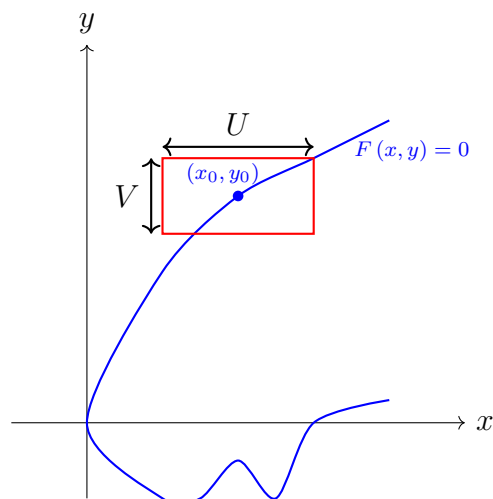
אז קיימות סביבות U של x_0 ו- V של y_0 כך שמתקיימות כל התכונות הבאות:

1. לכל $x \in U$ יש נקודה יחידה $y(x) \in V$ עבורה $F(x, y(x)) = 0$.

2. הפונקציה $y(x)$ גזירה ברציפות ב- U .

3. לכל $x \in U$ מתקיים כי

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y(x))}{F'_y(x, y(x))} \quad (1)$$



הערות:

- המשפט לא נותן דרך למצוא מפורשות את $y(x)$. למעשה, המשפט שימושי בדיוק כאשר לא ניתן למצוא מפורשות את $y(x)$.
- כדאי לשים לב שגם בנוסחה עבור $y'(x)$ מופיע $y(x)$ שבדרך כלל איננו יודעים, ולכן הנוסחה לא באמת נותנת לנו את $y'(x)$. בכל זאת, בנקודה $x = x_0$ נקבל:

$$y'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$$

לכן ספציפית $y'(x_0)$ בר חישוב.

- המשפט לא אומר שלכל $x \in U$ קיים $y \in \mathbb{R}$ יחיד עבורו $F(x, y) = 0$. הוא אומר שבסביבה V של y_0 , יש y יחיד כזה.
- יתכן שיש ערכי y מתאימים נוספים מחוץ ל- V , כלומר, "רחוקים מ- y_0 ".
- פירוש גיאומטרי: קיימת סביבה של (x_0, y_0) בה $F(x, y) = 0$ היא גרף של פונקציה.

דוגמאות עבור משפט הפונקציות הסתומות

1. נתונה המשוואה $x^4y^3 - xy + 6x^3 = 12$, אשר מתארת תת קבוצה של $\mathbb{R}^2$ (בעצם, זהו קו). הנקודה $(1, 2)$ נמצאת על הקו. אם נגדיר

$$F(x, y) = x^4y^3 - xy + 6x^3 - 12$$

אז $F(1, 2) = 0$, והפונקציה גזירה ברציפות בכל נקודה (זו בדיקה פשוטה). אמנם לא ניתן לפתור בצורה פשוטה את המשוואה ולחלץ את y , אך היות שמתקיים

$$F_y = 3x^4y^2 - x \Rightarrow F_y(1, 2) = 11 \neq 0$$

נוכל להסיק לפי המשפט שקיימות סביבות של $x = 1$ ושל $y = 2$ עבורן קיים חילוץ יחיד $y(x)$ (במילים אחרות, בסביבה הנקודה $(1, 2)$, המשוואה מתארת גרף של פונקציה).

2. המשוואה $x^2 + y^2 = 1$, כלומר $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, היא מקרה מיוחד שבו ניתן לחלץ ישירות $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ ולא צריך את המשפט. בכל זאת, נבדוק מה קורה מבחינת הנחות המשפט ומסקנותיו במקרה זה.

ראשית $F'_x = 2x$, $F'_y = 2y$ ולכן $F \in C^1$ ובנוסף $F'_y \neq 0$ לכל $y \neq 0$.

בנקודה $(x_0, y_0) = (1, 0)$ ההנחה כי $F'_y \neq 0$ לא מתקיימת וזה מסתדר עם מה שראינו קודם, שאין קיום יחידות של $y(x)$ ולא משנה כמה קטנות הסביבות של $x_0 = 1$ ו- $y_0 = 0$.

בנקודה $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ מתקיימות:

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0, \quad F'_y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2} \neq 0$$

לכן קיימת סביבה של $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$: $U = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ וסביבה של $y_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$: $V = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ כך שלכל $x \in U$ יש $y \in V$ יחיד, הלא הוא $y = -\sqrt{1-x^2}$, שמקיים כי $F(x, y(x)) = 0$.

ומה עם $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$? הוא הרי גם מתאים ל- x_0 . מדוע זה לא סותר את היחידות? כי היחידות היא לגמרי **מקומית**: יש לזהות ראשית את y_0 , ויתכן שיש מספר אפשרויות מתאימות עבור x_0 נתון, ורק אז יש סביבה של y_0 שבה יש יחידות.

באופן כללי, לא נדע מהם U, V ו- $y(x)$, אלא רק שהם קיימים.

3. נתבונן במשוואה $x^3 - y^3 = 0$ בסביבת הנקודה $(x_0, y_0) = (0, 0)$. ברור כי מסקנות המשפט מתקיימות: $y = x$ הוא חילוץ יחיד לכל x והוא בוודאי C^1 . אבל הנחות המשפט אינן מתקיימות שכן $F'_y = -3y^2 = 0$ עבור $y = 0$.

לכן המשפט אינו תנאי הכרחי לחילוץ, אלא רק מספיק.

נגזרות מסדר גבוה של החילוץ

מסקנה: נניח שמתקיימים התנאים של משפט הפונקציות הסתומות 1. אם בנוסף $F \in C^k$ בסביבת הנקודה (x_0, y_0) אז החילוץ $y(x)$ גזיר ברציפות k פעמים בסביבה U מהמשפט.

ההוכחה היא באינדוקציה על k בהתבסס על הנוסחה (1), כאשר בסיס האינדוקציה $k = 1$ הוא המשפט 1 עצמו.

1.2 הכללות של משפט הפונקציות הסתומות

ניסוח משפט הפונקציות הסתומות עבור חילוץ של z מתוך $F(x, y, z) = 0$ ודוגמאות

ניתן להכליל את המשפט, ונעשה את זה בשני שלבים. ראשית ננסח אותו אם נתונה המשוואה $F(x, y, z) = 0$ ורוצים לחלץ ממנה את $z(x, y)$:

משפט 2: תהי $F(x, y, z)$ גזירה ברציפות בסביבת הנקודה (x_0, y_0, z_0) .

נניח כי $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ וכן $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

אז קיימות סביבות U של (x_0, y_0) ו- V של z_0 כך שמתקיימות כל התכונות הבאות: לכל $(x, y) \in U$ יש נקודה יחידה $z(x, y) \in V$ עבורה $F(x, y, z(x, y)) = 0$, ובנוסף $z(x, y)$ גזירה ברציפות ב- U וכן לכל $(x, y) \in U$ מתקיים כי

$$\begin{cases} \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z(x, y))}{F'_z(x, y, z(x, y))} \\ \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z(x, y))}{F'_z(x, y, z(x, y))} \end{cases}$$

כמו קודם קל לשחזר את הנוסחאות עבור הנגזרות החלקיות על ידי גזירה של $F(x, y, z(x, y)) = 0$ לפי כלל השרשרת, וכנ"ל עבור נגזרות חלקיות מסדר גבוה אם ידוע כי $F \in C^k$.

דוגמה: נתונה המשוואה $xy^3 + yx^3 + ze^z = 0$. האם אפשר לחלק את $x = x(y, z)$ בסביבת הנקודה $(0, 1, 0)$? ומה לגבי $y = y(x, z)$ ו- $z = z(x, y)$?

נגדיר $F(x, y, z) = xy^3 + yx^3 + ze^z$. נשים לב שאכן $F(0, 1, 0) = 0$. מתקיים כי $F \in C^1$ וכן

$$F'_x(0, 1, 0) = 1, \quad F'_y(0, 1, 0) = 0, \quad F'_z(0, 1, 0) = 1$$

לכן משפט הפונקציות מבטיח שקיימים חילוצים $x = x(y, z)$ וכן $z = z(x, y)$. מצד שני הוא אינו מבטיח חילוק $y = y(x, z)$. זה בפני עצמו לא אומר שאין כזה חילוק.

אבל עבור הנקודה $(x, z) = (0, \varepsilon)$ שקרובה ל- $(0, 0) = (x, z)$ אין אף ערך y מתאים שקרוב ל- $y = 1$ ומקיים את המשוואה. לכן אין חילוק מהסוג שהמשפט מבטיח.

הוכחה כי $\vec{\nabla} F$ ניצב לקווי גובה או למשטחי רמה

ראינו בעבר אינטואיטיבית שהגרדיאנט ניצב לקווי גובה או למשטחי רמה (בהתאם למספר המשתנים). כעת נדייק ונוכיח.

משפט 3: תהי $F(x, y, z)$ גזירה ברציפות בסביבת הנקודה (x_0, y_0, z_0) אשר מקיימת $F(x_0, y_0, z_0) = c$. אם הגרדיאנט $\vec{\nabla} F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ אז הוא ניצב למשטח הרמה $F(x, y, z) = c$ בנקודה (x_0, y_0, z_0) .

אפשר להחליף את $F(x, y, z)$ בפונקציה $F(x, y, z) - c$ ולכן מספיק להוכיח את המשפט במקרה $c = 0$.

הערה: כנ"ל עבור קו גובה של פונקציה בשני משתנים, $F(x, y) = c$.

דוגמה: גולה מתחילה להתגלגל על המשטח $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ מהנקודה $(1, 2, 2)$ בכיוון ירידה מקסימלי. לאיזה כיוון מישורי ולאיזה כיוון מרחבי היא תתגלגל?

נגדיר $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. המשטח הנתון הוא משטח רמה של f ברמה -1 .

אנחנו מחפשים כיוון מרחבי $\hat{u} = (u_1, u_2, u_3)$ שמוכל במישור המשיק למשטח הנתון בנקודה הנתונה, וכך ש- u_3 מינימלי. הנורמל למישור המשיק הוא $\vec{\nabla} f(1, 2, 2) = (2, 4, -4)$ ולכן צריך להתקיים

$$\begin{cases} 0 = \vec{\nabla} f \cdot \hat{u} = 2u_1 + 4u_2 - 4u_3 \\ 1 = |\hat{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \end{cases}$$

ניתן למצוא את הערך המינימלי של u_3 תחת שני האילוצים הנ"ל באופן ישיר, או באופן נוח ומובנה יותר בעזרת שיטת כופלי לגרנז' שנלמד בעתיד.

סיכום של מציאת נורמל למשטח

פגשנו את כה שני תיאורים אפשריים של משטח: גרף של פונקציה בשני משתנים, ומשטח רמה של פונקציה בשלושה משתנים. נסכם את אופן מציאת הנורמל בכל אחד מהמקרים (בהנחה שהתנאים המתאימים מתקיימים):

תיאור המשטח	משוואה	נורמל	תנאים
גרף של פונקציה	$z = f(x, y)$	$(f_x, f_y, -1)$	דיפרנציאביליות
משטח רמה	$F(x, y, z) = 0$	(F_x, F_y, F_z)	C^1 ו- $\vec{\nabla} F \neq 0$

ניסוח משפט הפונקציות הסתומות עבור חילוץ של שני משתנים

משפט 4: נניח כי $F(x, y, z, w)$, $G(x, y, z, w)$ גזירות ברציפות בסביבת הנקודה (x_0, y_0, z_0, w_0) .

נניח בנוסף כי

$$\begin{cases} F(x_0, y_0, z_0, w_0) = 0 \\ G(x_0, y_0, z_0, w_0) = 0 \end{cases}$$

וכן

$$\det \left(\frac{\partial (F, G)}{\partial (z, w)} \right) (x_0, y_0, z_0, w_0) = \begin{vmatrix} F_z(x_0, y_0, z_0, w_0) & F_w(x_0, y_0, z_0, w_0) \\ G_z(x_0, y_0, z_0, w_0) & G_w(x_0, y_0, z_0, w_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

אז קיימות סביבות U של (x_0, y_0) ו- V של (z_0, w_0) כך שלכל $(x, y) \in U$ קיימת $(z(x, y), w(x, y)) \in V$ יחידה עבורה

$$\begin{cases} F(x, y, z(x, y), w(x, y)) = 0 \\ G(x, y, z(x, y), w(x, y)) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

בנוסף, הפונקציות $z(x, y)$, $w(x, y)$ גזירות ברציפות ב- U .

הערות:

- כלומר, התנאי המהותי לקיום של חילוץ קשור ליעקוביאן לפי המשתנים אותם רוצים לחלץ.
- ההכללה לחילוץ של k משתנים מתוך k משוואות היא ישירה.
- בשום אופן לא כדאי לזכור נוסחאות, אלא במקרה הצורך לגזור את (2) בעזרת כלל השרשרת לפי המשתנים החופשיים x, y .

אבל, נציין שאפשר לכתוב את התוצאה הישירה של 4 הגזירות הנ"ל בכתוב מטריוני (בדקו!):

$$\frac{\partial (F, G)}{\partial (z, w)} \cdot \frac{\partial (z, w)}{\partial (x, y)} = - \frac{\partial (F, G)}{\partial (x, y)} \quad (3)$$

המשתנים לא נכתבו במפורש כדי להקל על הקריאה, אבל חשוב לדייק שבגזירות של F, G הנקודה היא $(x, y, z(x, y), w(x, y))$. בכל אופן, אפשר להפעיל את כלל קרמר ולקבל ממש נוסחאות (שלא כדאי כאמור לזכור):

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = - \frac{\begin{vmatrix} F_x & F_w \\ G_x & G_w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_z & F_w \\ G_z & G_w \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = - \frac{\begin{vmatrix} F_y & F_w \\ G_y & G_w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_z & F_w \\ G_z & G_w \end{vmatrix}}$$

וכן

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x, y) = - \frac{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_z & F_w \\ G_z & G_w \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) = - \frac{\begin{vmatrix} F_z & F_y \\ G_z & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_z & F_w \\ G_z & G_w \end{vmatrix}}$$

בכל הנגזרות החלקיות, הנקודה היא $(x, y, z(x, y), w(x, y))$.

דוגמה לחילוץ של מספר משתנים

נתונות המשוואות

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 21 \\ 2x + yu + v = 0 \end{cases}$$

הראו שקיים חילוץ גזיר ברציפות של u, v מתוך מערכת המשוואות בסביבה של הנקודה $(2, -4, 1, 0)$ וחשבו את הנגזרת החלקית $u_x(2, -4)$.

נגדיר שתי פונקציות

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = x^2 + y^2 + u^2 + v^2 - 21 \\ G(x, y, u, v) = 2x + yu + v \end{cases}$$

אלו פולינומים ולכן גזירים ברציפות בכל נקודה. בנוסף,

$$\begin{cases} F(2, -4, 1, 0) = 0 \\ G(2, -4, 1, 0) = 0 \end{cases}$$

לבסוף,

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ y & 1 \end{pmatrix}$$

לכן בנקודה $(2, -4, 1, 0)$:

$$J = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

לכן לפי משפט הפונקציות הסתומות, קיימת סביבה U של $(2, -4)$ וסביבה V של $(1, 0)$ שביחס אליהן קיים חילוץ יחיד $u(x, y), v(x, y)$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + u(x, y)^2 + v(x, y)^2 = 21 \\ 2x + yu(x, y) + v(x, y) = 0 \end{cases}$$

בנוסף, החילוץ גזיר ברציפות ב- U . נגזור את שתי המשוואות לפי x ונקבל

$$\begin{cases} 2x + 2uu_x + 2vv_x = 0 \\ 2 + yu_x + v_x = 0 \end{cases}$$

נציב את הערכים $x = 2, y = -4$ עבורם $u = 1, v = 0$ ונקבל

$$\begin{cases} 4 + 2u_x = 0 \\ 2 - 4u_x + v_x = 0 \end{cases} \Rightarrow u_x = -2, v_x = -8$$

לכן $u_x(2, -4) = -2$

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. פולינום טיילור ומשפט טיילור עבור השארית בצורת פיאנו מחדו"א ב'1.
2. משפט פרמה מחדו"א ב'1.
3. מבחן הנגזרת השנייה למיון נקודות קיצון מקומיות והוכחתו בעזרת פולינום טיילור.

“ I may not have gone where I intended to go, but I think I have ended up where I needed to be.

”

Douglas Adams, The Long Dark Tea-Time of the Soul