

הרצאה 11: מסקנות מכלל השרשרת

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1 כלל השרשרת (המשך)
2	1.1 גרדיאנט אפס גורר פונקציה קבועה
3	2 אינטגרל פרמטרי
3	2.1 גרסה פשוטה של כלל הגזירה של לייבניץ
6	2.2 גרסה מלאה של כלל הגזירה של לייבניץ



תזכורות

משפט 1: אם הנגזרות החלקיות $f'_x(x, y)$ ו- $f'_y(x, y)$ של $f(x, y)$ שתיהן רציפות בנקודה (x_0, y_0) , אז $f(x, y)$ גזירה בנקודה (x_0, y_0) .

1 | כלל השרשרת (המשך)

1.1 גרדיאנט אפס גורר פונקציה קבועה

משפט על גרדיאנט אפס

עבור פונקציות במשתנה יחיד, אם $f'(x) \equiv 0$ בקטע שלם אז $f(x)$ קבועה בקטע. מדובר במסקנה שימושית ממשפט לגרנז', ויש לה גרסה שימושית גם עבור פונקציות במספר משתנים.

משפט 2: תהי $A \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה קשירה מסילתית ונניח כי f גזירה בכל נקודה של A . אם $\vec{\nabla} f \equiv 0$ בכל A , אז f קבועה ב- A .

דוגמאות:

1. נניח כי $f(x, y)$ גזירה בכל $\mathbb{R}^2$.

אם f קבועה על כל קו אנכי, היא לאו דווקא קבועה לגמרי.

למשל, $f(x, y) = x^2$.

אם f קבועה על כל קו אופקי, היא לאו דווקא קבועה לגמרי.

למשל, $f(x, y) = y^3$.

אבל, אם f מקיימת את שני התנאים גם יחד, אז היא כבר בהכרח קבועה.

נוכיח: תהי $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

אז קיימים קו אנכי $x = x_0$ אשר עובר בנקודה (x_0, y_0) , וקיים קו אופקי $y = y_0$ אשר עובר בנקודה (x_0, y_0) .

לכן $f(x, y_0)$ קבוע, כלומר, קיים $C_1 \in \mathbb{R}$ עבורו $f(x, y_0) \equiv C_1$ לכל $x \in \mathbb{R}$. נגזור את השוויון בעזרת כלל השרשרת ונקבל

$$f_x(x, y_0) \cdot 1 + f_y(x, y_0) \cdot 0 = 0$$

נציב $x = x_0$ ונקבל כי $f_x(x_0, y_0) = 0$.

באופן דומה, $f_y(x_0, y_0) = 0$.

זה נכון לכל נקודה (x_0, y_0) , ולכן בסך הכל $\vec{\nabla} f \equiv 0$ בכל $\mathbb{R}^2$.
לכן f קבועה בכל $\mathbb{R}^2$.

2. באופן כללי, המשפט אינו אם ורק אם.

למשל, הפונקציה $f(x, y) = y$ קבועה על ציר ה- x , שהוא קבוצה קשירה מסילתית. אבל $\vec{\nabla} f = (0, 1)$ בכל נקודה.

מנגד, אם A גם פתוחה, אז נראה שהמשפט הוא כבר שקילות.

3. אפשר להפעיל את המשפט במקרה הלא מועיל בו A מכיל נקודה בודדת.

זו קבוצה קשירה מסילתית, ואם $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = 0$ אז המשפט מבטיח כי f קבועה בכל A . אך זה במילא תמיד נכון כאשר A מכיל רק נקודה אחת.

מסקנה לגבי קבוצות פתוחות

מסקנה: יהי $D \subset \mathbb{R}^n$ תחום (קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית).

1. פונקציה f אשר מוגדרת ב- D היא קבועה בכל D אם ורק אם הנגזרות החלקיות שלה קיימות בכל D וכן $\vec{\nabla} f \equiv 0$ ב- D .

2. אם f רציפה ב- $\bar{D}$, אז f קבועה בכל $\bar{D}$ אם ורק אם הנגזרות החלקיות שלה קיימות בכל D וכן $\vec{\nabla} f \equiv 0$ ב- D .

יש הבדל קטן ביחס למשפט: לא צריך להניח גזירות מראש.

2 | אינטגרל פרמטרי

2.1 גרסה פשוטה של כלל הגזירה של לייבניץ

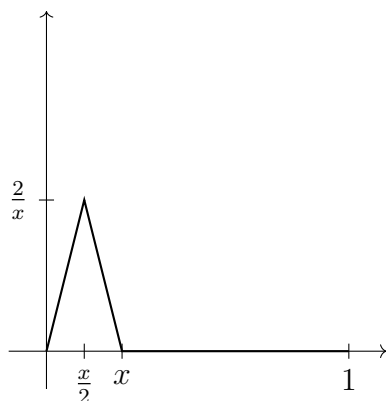
אינטגרל פרמטרי

בסעיף זה נראה יישום שימושי לחלק מהמושגים שפיתחנו עד כה. אינטגרל פרמטרי הוא פונקציה $F(x)$ שמוגדרת בעזרת אינטגרל באופן הבא:

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad (1)$$

באגף ימין יש לחשוב על x כאל פרמטר, במובן שהוא קבוע מבחינת האינטגרל לפי המשתנה y . זה מעניין, כי במקרים רבים בעתיד תראו שפונקציות (כמו פתרונות של משוואות דיפרנציאליות) לא ניתנות לחישוב מלא, אלא ניתנות להצגה בתור אינטגרלים פרמטרים כאלה. הפונקציה $F(x)$ מוגדרת היטב בקטע $[a, b]$ אם ורק אם לכל x קבוע בקטע, $f(x, y)$ אינטגרלית כפונקציה של y בקטע $[c, d]$.

דוגמה: אם עבור x קבוע, $f(x, y)$ נראית כך כפונקציה של y :



אז $F(x) \equiv 1$. זה פועל אם $x \neq 0$.

עבור $x = 0$, נגדיר את $f(0, y)$ כך שתהיה רציפה לפי x עבור y קבוע. אם y קבוע, אז $f(x, y) = 0$ עבור $x < y$. לכן $\lim_{x \searrow 0} f(x, y) = 0$ ל- y קבוע, ונגדיר $f(0, y) = 0$. בפרט, $F(0) = 0$, ולכן $F(x)$ אינה רציפה. זו פונקציה שרציפה לפי x לכל y קבוע, ובכל זאת $F(x)$ אינה רציפה.

ניתן להסיק מהדוגמה הנ"ל שזה לא מספיק ש- $f(x, y)$ תהיה רציפה לפי x על מנת ש- $F(x)$ תהיה רציפה. נעיר שאם בנוסף ידוע ש- $f(x, y)$ חסומה, זה כבר מספיק, אבל זהו משפט קשה.

גרסה פשוטה של כלל הגזירה של לייבניץ

השאלה העיקרית שנתעניין בה היא גזירות: האם ואיך אפשר לגזור אינטגרל פרמטרי? נראה שיש תגובה מתבקשת לגבי "איך", ורק נשאר להבין "מת".

דוגמה: אם יש צדק בעולם, אז למשל עבור

$$F(x) = \int_0^1 \sin(xe^y) dy$$

צריך להתקיים ש-

$$F'(x) = \int_0^1 e^y \cos(xe^y) dy$$

אם זה אכן נכון, וזה אכן נכון, אז אפשר אפילו לחשב בעזרת ההצבה $t = e^y$:

$$F'(x) = \frac{\sin(ex) - \sin x}{x}$$

זה נכון עבור $x \neq 0$.

אם $x = 0$, אפשר פשוט להציב ישירות ולקבל ש- $F'(0) = e - 1$, או להיעזר במשפט שננסח שיגיד ש- $F'(x)$ רציפה ולהשאיר את $x \rightarrow 0+$ בביטוי שקיבלנו. בכל מקרה,

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ex) - \sin x}{x}, & x \neq 0, \\ e - 1, & x = 0 \end{cases}$$

המשפט שמאפשר לגזור אינטגרל פרמטרי באופן פשוט כמו שגזרנו בדוגמה מכונה **כלל לייבניץ**.

משפט 3: תהי $f(x, y)$ מוגדרת במלבן $[a, b] \times [c, d]$ כך ש-

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

מוגדרת היטב (כלומר, לכל x קבוע, $f(x, y)$ אינטגרלית לפי המשתנה y בקטע $[c, d]$). נניח ש- $\frac{\partial f}{\partial x}$ מוגדרת ורציפה במלבן. אז $F(x)$ גזירה בקטע $[a, b]$, ו-

$$F'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$$

הערה: בלי כל מה שמסביב, כלל לייבניץ אומר ש-

$$\frac{d}{dx} \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$$

לכן כלל לייבניץ מכונה לעיתים "גזירה תחת סימן האינטגרל", או "החלפת סדר בין גזירה לאינטגרציה". חשוב לזכור שבאופן כללי **לא** ניתן לגזור תחת סימן האינטגרל. למשל, באינטגרל מוכלל, המצב מסובך יותר.

דוגמה: אפשר להשתמש בכלל לייבניץ כדי לחשב אינטגרלים. למשל, האינטגרל $I = \int_0^1 \frac{x}{(1+2x)^2} dx$. זו דוגמה שאפשר לחשב גם בשיטה אחרת, אבל יש דוגמאות רבות שבהן לא ברור איך.

נגדיר

$$I(x) = \int_0^1 \frac{y}{(1+xy)^2} dy$$

אנחנו רוצים לחשב את $I(2)$. הרעיון הוא

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{1+xy} \right) dy = -\frac{d}{dx} \left(\int_0^1 \frac{1}{1+xy} dy \right) \\ &= -\frac{d}{dx} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right) = -\frac{\frac{1}{1+x} \cdot x - 1 \cdot \ln(1+x)}{x^2} \end{aligned}$$

$$\text{לכן } I = I(2) = -\frac{\frac{2}{3} - \ln 2}{4} = \frac{1}{4} \ln 3 - \frac{1}{6}$$

המעבר היחיד שמצריך הצדקה הוא בהוצאת הנגזרת החלקית $\frac{\partial}{\partial x}$ מחוץ לאינטגרל. זה בדיוק התפקיד של כלל לייבניץ: הפונקציה $f(x, y) = \frac{1}{1+xy}$ עומדת בהנחות של כלל לייבניץ במלבן $[0, 3] \times [0, 1]$, שנבחר כך על מנת שבציר x יכיל את הנקודה $x = 2$ ובציר y יהיה שווה לקטע האינטגרציה הנתון $[0, 1]$.

2.2 גרסה מלאה של כלל הגזירה של לייבניץ

גרסה מלאה של כלל הגזירה של לייבניץ

דוגמה: כלל לייבניץ מאפשר לגזור ביטוי כמו למשל $\int_0^1 \sin(xy) dy$. אבל מה עם

$$?F(x) = \int_0^x \sin(xy) dy$$

כלל לייבניץ שניסחנו לא עוזר כי יש x בגבול האינטגרציה. נעיר שאם לא היה x בתוך האינטגרל, יכולנו לגזור לפי המשפט היסודי.

אפשר בעצם מתוך שני אלה להבין את הנגזרת של $F(x)$: אם נסמן

$$H(x, t) = \int_0^t \sin(xy) dy$$

אז אנחנו יודעים לגזור לפי x בנפרד ולפי t בנפרד. מכיוון ש- $F(x) = H(x, x)$, אפשר לגזור לפי כלל השרשרת!

$$F'(x) = H'_x(x, x) + H'_t(x, x) = \int_0^x y \cos(xy) dy + \sin(x^2)$$

כמובן שאנחנו צריכים לוודא שכלל השרשרת תקף (גזירות).

משפט 4: תהי $f(x, y)$ רציפה במלבן $[a, b] \times [c, d]$. נניח בנוסף ש- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ מוגדרת ורציפה במלבן. תהינה $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow [c, d]$ פונקציות גזירות. אז הפונקציה

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$$

גזירה בקטע $[a, b]$, ו-

$$F'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy + f(x, \beta(x)) \beta'(x) - f(x, \alpha(x)) \alpha'(x)$$

למה לצורך הוכחת כלל לייבניץ

ראשית ננסח בנפרד למה שתשמש אותנו בהוכחה:

למה 5: תהי $g(x, y)$ פונקציה רציפה במלבן $[a, b] \times [c, d]$. אז הפונקציה

$$G(x, t) = \int_c^t g(x, y) dy$$

רציפה במלבן.

לא נוכיח את הלמה בקורס זה.

הטריק של פיינמן

דוגמה: נחשב את האינטגרל $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$. אם ננסה כמו קודם משהו כמו לגזור את $\int_0^1 \frac{\ln(1+yx)}{1+x^2} dx$, ניתקל בקשיים. מצד שני, אם נשים y גם בגבול האינטגרציה, אנחנו נסתדר:

$$F(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2} dx$$

אנחנו צריכים לחשב את $F(1)$. נגזור באמצעות כלל לייבניץ:

$$F'(y) = \int_0^y \frac{x}{(1+xy)(1+x^2)} dx + \frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2}$$

עכשיו אפשר לחשב את האינטגרל באמצעות פירוק לשברים חלקיים, מה שלא יכולנו לעשות קודם בגלל הלוגריתם.

$$F'(y) = \frac{y}{1+y^2} \arctan y + \frac{\ln(1+y^2)}{2(1+y^2)}$$

זה נראה קשה לשחזר מכאן את $F(y)$, אבל הביטוי ל- $F'(y)$ הוא בעצם נגזרת של מכפלה:

$$F(y) = \frac{1}{2} \ln(1+y^2) \arctan y + C$$

לבסוף, $F(0) = 0$ ולכן $C = 0$, ונוכל להסיק ש-

$$I = F(1) = \frac{\pi}{8} \ln 2$$

השיטה הזו לחישוב אינטגרלים באמצעות כלל לייבניץ הייתה אהובה במיוחד על הפיסיקאי ריצ'רד פיינמן, שסיפר שהוא הפך לסלבריטי מקומי לחישוב אינטגרלים בזכותה. חבריו לספסל הלימודים היו מתיאשים מאיזשהו אינטגרל לאחר שניסו עליו את כל השיטות הרגילות, והיו שואלים את פיינמן לגביו. פיינמן היה מנסה ראשית כל את כלל לייבניץ, שלא היה מאוד מוכר בהקשר הזה אז, ומיד פותר את האינטגרל.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. משפט ערך הביניים לפונקציות רציפות.
2. כלל קרמר לפתרון של מערכת משוואות אי הומוגנית.

“ *I would rather have questions that can't be answered than answers that can't be questioned.* ”

Richard P. Feynman