

הרצאה 10: הגרדיאנט, כלל השרשרת

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1 גזירות (המשך)
2	1.1 הגרדיאנט
4	2 כלל השרשרת
5	2.1 כלל השרשרת עבור ביטויים במשתנה אחד
8	2.2 כלל השרשרת עבור ביטויים בשני משתנים
10	2.3 הכללות של כלל השרשרת



Robert Taibbi L.C.S.W.
Fixing Families

Feeling Fed Up, Resentful? Maybe You're Differentiating

There are times when we realize what
we really need.

Posted September 17, 2022

Reviewed by Vanessa Lancaster

Posted in [r/mathmemes](#)



1 | גזירות (המשך)

1.1 הגרדיאנט

הגרדיאנט

אפשר לכתוב מחדש את הנוסחה לחישוב גזירת מכוונת $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}} = f'_x u_1 + f'_y u_2$ בעזרת מכפלה סקלרית בין וקטורים:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}} = (f'_x, f'_y) \cdot (u_1, u_2)$$

הגדרה 1. תהי $f(x, y)$ פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה (x_0, y_0) . הגרדיאנט של $f(x, y)$ בנקודה (x_0, y_0) (אם הוא קיים) הוא הוקטור

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

באופן דומה, עבור פונקציה של שלושה משתנים:

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right)$$

מסקנה: נניח כי f גזירה בנקודה P .

1. לכל וקטור יחידה $\hat{u}$ מתקיים ש-

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(P) = \vec{\nabla} f(P) \cdot \hat{u}$$

2. הנגזרת המכוונת המקסימלית מבין כל וקטורי הכיוון $\hat{u}$ מתקבלת עבור כיוון הגרדיאנט $\hat{u} = \frac{\vec{\nabla} f(P)}{|\vec{\nabla} f(P)|}$ וערכה שווה לגודל הגרדיאנט:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(P) = |\vec{\nabla} f(P)|$$

3. הנגזרת המכוונת המינימלית מבין כל וקטורי הכיוון $\hat{u}$ מתקבלת עבור הכיוון המנוגד לכיוון הגרדיאנט $\hat{u} = -\frac{\vec{\nabla} f(P)}{|\vec{\nabla} f(P)|}$ וערכה שווה למינוס גודל הגרדיאנט:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(P) = -|\vec{\nabla} f(P)|$$

בנוסף, בסעיפים 2 ו-3, אם $\vec{\nabla} f(P) \neq 0$, אז ה- $\hat{u}$ הוא היחיד הנותן מקסימום / מינימום.

כיווני תנועה

אם נזוז מהנקודה (x, y) בכיוון $\hat{u}$, אז קצב השינוי הרגעי של f הוא $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(x, y)$. לכן נמלה שנמצאת על ההר $z = f(x, y)$ בנקודה $(x, y, f(x, y))$ יכולה לזוז באופן רגעי בכל אחד מבין הכיוונים המרחביים הבאים:

$$\left(u_1, u_2, \frac{\partial f}{\partial \hat{u}}\right) = \left(\hat{u}, \vec{\nabla} f \cdot \hat{u}\right), \quad u_1^2 + u_2^2 = |\hat{u}|^2 = 1$$

לכן אם הנמלה רוצה לעלות באופן החד ביותר אז עליה לנוע רגעית בכיוון $\left(\frac{\vec{\nabla} f}{|\vec{\nabla} f|}, |\vec{\nabla} f|\right)$ (בהנחה ש- $\vec{\nabla} f \neq 0$).

נעיר שזה אינו וקטור יחידה, אך ניתן כמובן לנרמל אותו.

דוגמה: גולה מתחילה להתגלגל על המשטח $z = x^2 + xy$ מהנקודה $(1, 2, 3)$ בכיוון ירידה מקסימלי. לאיזה כיוון מישורי ולאיזה כיוון מרחבי היא תתגלגל?

נגדיר $f(x, y) = x^2 + xy$. המשטח הנתון הוא הגרף של f .

הכיוון שבו צריך לשנות את (x, y) על מנת שקצב הירידה יהיה מקסימלי הוא

$$\hat{u} = -\frac{\vec{\nabla} f}{|\vec{\nabla} f|} = -\frac{1}{\sqrt{17}}(4, 1)$$

הכיוון המרחבי לפני נרמול שאליו הגולה תתגלגל רגעית הוא

$$\vec{v} = \left(\hat{u}, \vec{\nabla} f \cdot \hat{u}\right) = \left(-\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{1}{\sqrt{17}}, -\sqrt{17}\right)$$

לכן בסך הכל הכיוון המרחבי המתאים הוא

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(-\frac{4}{\sqrt{306}}, -\frac{1}{\sqrt{306}}, -\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{18}}\right)$$

הגרדיאנט ניצב לקווי גובה / משטחי רמה

מסקנה נוספת מכך ש- $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}} = \vec{\nabla} f \cdot \hat{u}$ היא שהנגזרת המכוונת מתאפסת בכיוון שניצב לגרדיאנט. המשמעות של העובדה הזו היא שאם נניע נמלה בכיוון שניצב לגרדיאנט, אז היא לא אמורה להרגיש שינוי בערכי הפונקציה.

אפשר לנסח את זה במדויק כמשפט. נעשה זאת בהמשך.

הערה: אם הנגזרות החלקיות של $f(x, y)$ קיימות בכל נקודה ב- $\mathbb{R}^2$, אז הגרדיאנט $\vec{\nabla} f(x, y)$ הוא פונקציה לא סקלרית:

$$\vec{\nabla} f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

כלומר, לכל נקודה במישור מותאם וקטור דו-ממדי.

להעתקה/התאמה כזו קוראים **שדה וקטורי**. מעניין לשים לב שגם אם רוצים להתמקד רק בפונקציות סקלריות, שדות וקטוריים "צצים" בכל זאת.

באופן דומה, אם $f(x, y, z)$ גזירה בנקודה (x_0, y_0, z_0) אז הגרדיאנט ניצב למשטח הרמה שלה שמתאים לנקודה, שהוא $f(x, y, z) = C := f(x_0, y_0, z_0)$.

לכן בשני המקרים, כיווני התנועה האפשריים במקרה זה הם אלו אשר ניצבים לגרדיאנט $\vec{\nabla} f$.

דוגמה: נמצא וקטור שמאונך לספירה $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ בנקודה (x, y, z) שנמצאת עליה.

$$\text{נסמן } f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \text{ ונחשב}$$

$$\vec{\nabla} f = (2x, 2y, 2z)$$

עד כדי סקלר, מדובר בוקטור שמחבר את הראשית אל הנקודה (x, y, z) עצמה.

הנגזרת (העשרה)

סעיף זה אינו בחומר הקורס, אבל הוא מובא כן כי מתבקש להתייחס לשאלה מרכזית שעד כה התעלמנו ממנה. הגדרנו את המשמעות של פונקציה $f(x, y)$ גזירה בנקודה (x_0, y_0) , אבל לא הגדרנו את **הנגזרת** $f'(x_0, y_0)$. הגדרנו נגזרות חלקיות f'_x ו- f'_y , אבל אלו אינן בפני עצמן "הנגזרת".

הרעיון המרכזי מאחורי גזירות היא קירוב לינארי. פונקציה היא גזירה אם ניתן לקרב את $\Delta f = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ באמצעות פונקציה לינארית של h, k : $Ah + Bk$. נזכיר כי $A = f'_x(x_0, y_0)$ ו- $B = f'_y(x_0, y_0)$, אם כי זה לא מהותי כרגע. הפונקציה הלינארית הזו מכונה **הנגזרת** של f בנקודה:

$$(f'(x_0, y_0))(h, k) = Ah + Bk$$

כדי להבין יותר טוב את הנ"ל, נזכיר ש- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. הנגזרת **בנקודה** (x_0, y_0) היא פונקציה מאותו טיפוס, אבל לינארית: $f'(x_0, y_0) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

מעניין לציין שככל העתקה לינארית, אפשר לשאול מה המטריצה המייצגת שלה ביחס לבסיס הסטנדרטי, ולא קשה להיווכח שמתקיים

$$[f'(x_0, y_0)]_E = (A, B) = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0)^t$$

2 | כלל השרשרת

2.1 כלל השרשרת עבור ביטויים במשתנה אחד

מבוא ודין לכלל השרשרת

בסעיף הזה נדבר על גזירה של פונקציה מורכבת. כלומר, נכליל את כלל השרשרת

$$(f(\varphi(t)))' = f'(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

למקרים שבהם יש יותר משתנים.

כלל השרשרת מורכב משני חלקים: הרכבה של גזירות היא גזירה, ובנוסף יש נוסחה עבור "הנגזרת".

יש הבדל פרקטי בין כלל השרשרת שנלמד במשתנה יחיד לבין כללי השרשרת במספר משתנים: בהינתן פונקציה קונקרטית כמו $\sin(x^2 e^{xy})$, אנחנו יכולים לגזור אותה לפי x או לפי y באמצעות כלל השרשרת ממשתנה יחיד, כי בכל פעם משתנה אחד "קפוא" ונותרה תלות רק באחר:

$$(\sin(x^2 e^{xy}))'_x = \cos(x^2 e^{xy}) (2xe^{xy} + x^2 ye^{xy})$$

כלומר, על פניו אין לנו צורך פרקטי בכלל שרשרת נוסף. בכל זאת, יש מקרים שבהם הפונקציה המורכבת אינה ידועה וכלל השרשרת חשוב מאוד.

כלל השרשרת לביטויים במשתנה אחד והערות

נתחיל ממקרה פשוט:

משפט 2. תהי $f(x, y)$ גזירה בנקודה (x_0, y_0) , ותהיינה $x(t)$ ו- $y(t)$ שתי פונקציות גזירות בנקודה $t = t_0$. נניח ש- $x(t_0) = x_0$ ו- $y(t_0) = y_0$. אז הפונקציה $F(t) = f(x(t), y(t))$ גזירה בנקודה $t = t_0$, ו-

$$F'(t_0) = f'_x(x_0, y_0) x'(t_0) + f'_y(x_0, y_0) y'(t_0)$$

דוגמה: כדי להבהיר שמתקבלת בסוף פונקציה של משתנה יחיד, נסתכל למשל על $f(x, y) = \sin(xy)$ עם

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$$

$$F(t) = \sin(t \cdot t^2) = \sin(t^3)$$

הצורך בכלל שרשרת כזה הוא יותר "תיאורטי": אם אין לנו נוסחה מפורשת עבור $f(x, y)$ אבל אנחנו רוצים לומר משהו על הנגזרת של $f(t^2, \sin t)$, אז

$$\frac{d}{dt} [f(t^2, \sin t)] = f'_x(t^2, \sin t) \cdot 2t + f'_y(t^2, \sin t) \cdot \cos t$$

קשה אולי לדמיין איפה יהיה צורך בכלל, אבל נראה כבר בעמודים הקרובים מספר שימושים.

הערות:

- יש דמיון רעיוני לנוסחה לנגזרת מכוונת עבור פונקציה גזירה:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}} = f'_x u_1 + f'_y u_2$$

הכיוון $\hat{u}$ מוחלף בוקטור שהוא הכיוון הרגעי של העקום (משיק רגעי) $(x'(t), y'(t))$:

$$\frac{d(f(x(t), y(t)))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t)$$

כמו בנוסחה הנ"ל לנגזרת מכוונת, אפשר לכתוב גם את כלל השרשרת הפשוט בכתוב וקטורי:

$$F' = \vec{\nabla} f \cdot (x', y')$$

- המשפט הזה מאפשר להוכיח בקלות שעבור פונקציה גזירה, הגרדיאנט ניצב לקווי גובה $(x(t), y(t))$:

$$f(x(t), y(t)) \equiv C$$

ולכן

$$\vec{\nabla} f \cdot (x', y') = 0$$

דוגמה והכללה לפונקציה בשלושה משתנים ויותר

דוגמאות:

1. נתון כי $f(x, y)$ דיפרנציאבילית בכל $\mathbb{R}^2$.

הראו שאם $f(x, y)$ קבועה על כל ישר מהצורה $y - x = C$ אז

$$f_x + f_y \equiv 0$$

תהי $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. נבחר ערך של C כך שהנקודה (x_0, y_0) נמצאת על הישר $y - x = C$ (כלומר, $C = y_0 - x_0$).

לפי הנתון, f קבועה על הישר $y - x = C$. לכן קיים קבוע $\alpha \in \mathbb{R}$ עבורו

$$f(x, x + C) = \alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

נגזור את השוויון הזה בעזרת כלל השרשרת ונקבל

$$f_x(x, x + C) \cdot 1 + f_y(x, x + C) \cdot 1 = 0$$

נציב $x = x_0$ ונקבל

$$0 = f_x(x_0, x_0 + C) + f_y(x_0, x_0 + C) = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)$$

2. נניח שידוע כי $f_x + f_y = 0$. למשוואה כזו קוראים **משוואה דיפרנציאלית חלקית**.

נוכיח כי f קבועה על ישרים מהצורה $y = x + C$ ולכן קיימת פונקציה $h(t)$ של משתנה יחיד כך ש- $f(x, y) = h(y - x)$. למשל, $f(x, y) = \sin(y - x)$ מקיימת את התנאי אבל $f(x, y) = \sin(y + x)$ לא מקיימת את התנאי. לזה קוראים **פתרון כללי** של המשוואה הדיפרנציאלית החלקית.

אנחנו רוצים להוכיח שאם f מקיימת את התנאי אז הביטוי $f(x, x + C)$ קבוע (לא תלוי ב- x). משיקולים של לא להתבלבל, רצוי לתת שם אחר למשתנה בהתאם לנוסחה: נוכיח שהביטוי $f(t, t + C)$ קבוע. לפי כלל השרשרת הוא גזיר ולכן מספיק להוכיח שנגזרתו 0. ואכן

$$\frac{d}{dt}(f(t, t + C)) = f'_x(t, t + C) \cdot 1 + f'_y(t, t + C) \cdot 1 = 0$$

בדקו עם עצמכם - האם ברור למה זה גורר קיום של פונקציה $h(t)$ כנ"ל? נדייק זאת בקרוב.

עבור שלושה משתנים,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(x(t), y(t), z(t))) &= f'_x(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) \\ &+ f'_y(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + f'_z(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t) \end{aligned}$$

באופן דומה, אם $f(x_1, \dots, x_n)$ גזירה בנקודה x_0 ונתונות פונקציות גזירות $x_1(t), \dots, x_n(t)$ בנקודה t_0 , כך ש- $x_i(t_0) = x_{i,0}$, אז הפונקציה המורכבת $f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ גזירה בנקודה t_0 ובנוסף

$$F'(t_0) = \sum_{k=1}^n f'_{x_k}(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) x'_k(t_0)$$

2.2 כלל השרשרת עבור ביטויים בשני משתנים

כלל השרשרת עבור ביטויים בשני משתנים והערות

כלל השרשרת הקודם היה עבור הרכבה מסוג $f(x(t), y(t))$. כלל השרשרת השני הוא עבור הרכבה מסוג $f(x(u, v), y(u, v))$.

משפט 3: תהי $f(x, y)$ גזירה בנקודה (x_0, y_0) , ונניח כי $x(u, v)$ ו- $y(u, v)$ גזירות בנקודה (u_0, v_0) , כך שבנוסף $x(u_0, v_0) = x_0$ ו- $y(u_0, v_0) = y_0$. אז הפונקציה $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ גזירה בנקודה (u_0, v_0) , ומתקיים

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0) = f'_x(x_0, y_0) x'_u(u_0, v_0) + f'_y(x_0, y_0) y'_u(u_0, v_0), \\ \frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0) = f'_x(x_0, y_0) x'_v(u_0, v_0) + f'_y(x_0, y_0) y'_v(u_0, v_0), \end{cases}$$

הערה: הנוסחאות עבור הנגזרות החלקיות נובעות מכלל השרשרת הראשון שראינו, מכיוון שההגדרה של $\frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0)$ היא $\varphi'(0)$ כאשר

$$\varphi(t) = F(u_0 + t, v_0)$$

החלק המהותי במשפט הוא הגזירות של F . נשים לב בנוסף שניתן לכתוב את הנוסחאות בכתוב מטרצי מקוצר:

$$\vec{\nabla} F(u, v) = \begin{pmatrix} x'_u(u, v) & y'_u(u, v) \\ x'_v(u, v) & y'_v(u, v) \end{pmatrix} \vec{\nabla} f(x(u, v), y(u, v))$$

המטריצה הנ"ל מכונה **מטריצת יעקובי**¹ ומסומנת $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$.

דוגמאות לשימוש בכלל השרשרת

דוגמאות:

1. בהינתן פונקציה $f(x, y)$ מהי המשמעות של "לגזור אותה לפי r " ולמה שווה נגזרת כזו?

כך ללא הסברים נוספים, זה חסר משמעות. אבל אם ננסה "להגדיל ראש", אפשר לפרש כמעט באופן חד-משמעי באופן הבא: נסמן $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$, ואז הכוונה ל- $\frac{\partial g}{\partial r}$.

למה זה שווה, במונחים של f ישירות? ובכן, לפי כלל השרשרת:

$$g_r(r, \theta) = f'_x(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \cos \theta + f'_y(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \sin \theta$$

מתי חישובים כאלה יכולים להיות מעניינים? יש כל מיני מקרים, ואחד מהם מובא בסעיף הבא.

¹למעשה, זו מטריצת יעקובי המשוחלפת.

2. נתונה פונקציה $f(x, y)$ אשר גזירה עבור $(x, y) \neq (0, 0)$ שמקיימת את התנאי הבא:

$$xf_x + yf_y = 0$$

מה ניתן להסיק מכך על הפונקציה f ?

נגדיר פונקצית עזר על ידי $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ (זו f במשתנים קוטביים; f לא נתונה במפורש ולכן איננו יודעים גם מהי g).

לפי כלל השרשרת,

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial}{\partial r}(f(r \cos \theta, r \sin \theta)) = f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \cos \theta + f_y(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \sin \theta$$

לכן לכל $r \neq 0$ מתקיים כי

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \frac{1}{r}(r \cos \theta \cdot f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \sin \theta \cdot f_y(r \cos \theta, r \sin \theta)) = 0$$

לפי הנתון $xf_x + yf_y = 0$

לכן $g(r, \theta)$ תלויה במשתנה θ בלבד (נסו להוכיח זאת במדויק!).

כלומר, $f(x, y)$ תלויה רק בזווית של הוקטור המחבר את הראשית אל הנקודה (x, y) ביחס לציר x .

3. נתונה פונקציה אשר גזירה ברציפות פעמיים $f(x, t)$ שמקיימת את התנאי הבא:

$$f_{tt} - f_{xx} = 0$$

נגדיר משתנים חדשים $u = x + t$ ו- $v = x - t$. איזה מין תנאי מקיימת f "בלשון u, v "?

כדי לענות על השאלה, נגדיר את $g(u, v)$ כך שתייצג את f לפי המשתנים u, v . באופן כללי, אפשר לכתוב:

$$g(u, v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

או באופן שקול $f(x, t) = g(x+t, x-t)$. לכן:

$$\begin{cases} f_x(x, t) = g_u(x+t, x-t) \cdot 1 + g_v(x, t) \cdot 1 \Rightarrow f_{xx} = g_{uu} + 2g_{uv} + g_{vv}, \\ f_t(x, t) = g_u(x+t, x-t) \cdot 1 + g_v(x, t) \cdot (-1) \Rightarrow f_{tt} = g_{uu} - 2g_{uv} + g_{vv} \end{cases}$$

נציב לתוך התנאי הנתון:

$$0 = f_{tt} - f_{xx} = 4g_{uv}$$

נקבל כי $g_{uv} \equiv 0$. נסו להשתכנע שמכך נובע $g_u = c_1(u)$ ולכן

$$g(u, v) = C_1(u) + C_2(v)$$

כלומר:

$$f(x, t) = C_1(x+t) + C_2(x-t)$$

המעבר למשתנים u, v גרם לתנאי להפוך לנגיש, כך שהצלחנו למצוא בדיוק מי כל הפונקציות f שמקיימות אותו.

4. נתונות:

$$f(x, y) = x + 2y, \quad x(u, v) = uv, \quad y(u, v) = u^2v$$

$$F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)) = uv + 2u^2v$$

מהן הנגזרות החלקיות הבאות: $f_x, f_u, F_x, F_u, x_u, v_y$?

2.3 הכללות של כלל השרשרת

הכללה עבור $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

ניתן להכליל את כלל השרשרת לכל מיני מצבים כאשר מאפשרים שלושה משתנים. בכל המקרים התנאי הוא שכל הפונקציות אשר מרכיבות את ההרכבה הן גזירות בנקודות המתאימות, והמסקנה היא שההרכבה גזירה ושניתן לחשב את הנגזרות החלקיות באמצעות הנוסחאות שמפורטות מיד.

למשל, עבור גזירה של הרכבה $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ נקבל:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(r(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(r(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial z}(r(u, v)) \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(r(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(r(u, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial z}(r(u, v)) \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \end{cases}$$

סימנו $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ לטובת קריאות שפוייה. בכתוב מטרצי:

$$\vec{\nabla} F(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} \vec{\nabla} f(r(u, v))$$

המטריצה מסומנת בדרך כלל בסימון $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)}$ (לעיתים המטריצה המשוכללת מסומנת בסימון זה). כדאי לזכור שכל הוקטורים הם וקטורי עמודה, למרות שלרוב אנחנו כותבים אותם בשורה מטעמי נוחות.

הכללה עבור $f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$

עבור גזירה של הרכבה $F(u, v, w) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ נקבל:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u}(u, v, w) = \frac{\partial f}{\partial x}(r(u, v, w)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v, w) + \frac{\partial f}{\partial y}(r(u, v, w)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v, w) + \frac{\partial f}{\partial z}(r(u, v, w)) \frac{\partial z}{\partial u}(u, v, w) \\ \frac{\partial F}{\partial v}(u, v, w) = \frac{\partial f}{\partial x}(r(u, v, w)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v, w) + \frac{\partial f}{\partial y}(r(u, v, w)) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v, w) + \frac{\partial f}{\partial z}(r(u, v, w)) \frac{\partial z}{\partial v}(u, v, w) \\ \frac{\partial F}{\partial w}(u, v, w) = \frac{\partial f}{\partial x}(r(u, v, w)) \frac{\partial x}{\partial w}(u, v, w) + \frac{\partial f}{\partial y}(r(u, v, w)) \frac{\partial y}{\partial w}(u, v, w) + \frac{\partial f}{\partial z}(r(u, v, w)) \frac{\partial z}{\partial w}(u, v, w) \end{cases}$$

סימנו $r(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ לטובת קריאות שפוייה. בכתוב מטרצי:

$$\vec{\nabla} F(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial y}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial z}{\partial u}(u, v, w) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial z}{\partial v}(u, v, w) \\ \frac{\partial x}{\partial w}(u, v, w) & \frac{\partial y}{\partial w}(u, v, w) & \frac{\partial z}{\partial w}(u, v, w) \end{pmatrix} \vec{\nabla} f(r(u, v, w))$$

המטריצה מסומנת בדרך כלל בסימון $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ (לעיתים המטריצה המשוכללת מסומנת בסימון זה).

הכללה עבור $f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$

עבור גזירה של הרכבה $F(u, v, w) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ נקבל:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u}(u, v, w) = \frac{\partial f}{\partial x}(r(u, v, w)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v, w) + \frac{\partial f}{\partial y}(r(u, v, w)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v, w) + \frac{\partial f}{\partial z}(r(u, v, w)) \frac{\partial z}{\partial u}(u, v, w) \\ \frac{\partial F}{\partial v}(u, v, w) = \frac{\partial f}{\partial x}(r(u, v, w)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v, w) + \frac{\partial f}{\partial y}(r(u, v, w)) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v, w) + \frac{\partial f}{\partial z}(r(u, v, w)) \frac{\partial z}{\partial v}(u, v, w) \\ \frac{\partial F}{\partial w}(u, v, w) = \frac{\partial f}{\partial x}(r(u, v, w)) \frac{\partial x}{\partial w}(u, v, w) + \frac{\partial f}{\partial y}(r(u, v, w)) \frac{\partial y}{\partial w}(u, v, w) + \frac{\partial f}{\partial z}(r(u, v, w)) \frac{\partial z}{\partial w}(u, v, w) \end{cases}$$

סימנו $r(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ לטובת קריאות שפוייה. בכתוב מטרצי:

$$\vec{\nabla} F(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial y}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial z}{\partial u}(u, v, w) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial z}{\partial v}(u, v, w) \\ \frac{\partial x}{\partial w}(u, v, w) & \frac{\partial y}{\partial w}(u, v, w) & \frac{\partial z}{\partial w}(u, v, w) \end{pmatrix} \vec{\nabla} f(r(u, v, w))$$

המטריצה מסומנת בדרך כלל בסימון $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ (לעיתים המטריצה המשוחלפת מסומנת בסימון זה).

גזירה שניה של הרכבה

נסמן $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ ונחשב את $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$.

ראשית, לפי כלל השרשרת:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = f'_x(x(u, v), y(u, v)) x'_u(u, v) + f'_y(x(u, v), y(u, v)) y'_u(u, v)$$

כעת נגזור לפי v . חשוב לזכור שחלק מהביטויים ב- F'_u עדיין מורכבים ולכן צריך לגזור גם אותם לפי כלל השרשרת. למשל,

$$\frac{\partial}{\partial v} [f'_x(x(u, v), y(u, v))] = f'_{xx}(x(u, v), y(u, v)) x'_v(u, v) + f'_{xy}(x(u, v), y(u, v)) y'_v(u, v)$$

כמו כן,

$$\frac{\partial}{\partial v} [f'_y(x(u, v), y(u, v))] = f'_{yx}(x(u, v), y(u, v)) x'_v(u, v) + f'_{yy}(x(u, v), y(u, v)) y'_v(u, v)$$

נמשיך עם סימונים מקוצרים של x במקום $x(u, v)$ וכו', ונקבל לפי כללי גזירה של סכום ומכפלה:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = [f'_{xx} x'_v + f'_{xy} y'_v] x'_u + f'_x x'_{uv} + [f'_{yx} x'_v + f'_{yy} y'_v] y'_u + f'_y y'_{uv}$$

אם ידוע בנוסף ש- $f \in C^2$ ולכן משפט שורץ תקף, אז $f'_{xy} = f'_{yx}$ ולכן

$$F'_{uv} = f'_{xx} x'_u x'_v + f'_{xy} (x'_u y'_v + x'_v y'_u) + f'_{yy} y'_u y'_v + f'_x x'_{uv} + f'_y y'_{uv}$$

נסו לכתוב נוסחאות דומות עבור F'_{uu} ו- F'_{vv} , ועבור מקרים נוספים של הרכבות.

מקרה כללי של כלל השרשרת

משפט 4: נניח כי f גזירה בנקודה $x \in \mathbb{R}^n$ ונניח כי לכל $j = 1, \dots, n$ נתונה פונקציה $x_j(t)$ אשר גזירה בנקודה $t \in \mathbb{R}^k$ כך ש- $x_j(t) = x_j$. אז הפונקציה המורכבת $F(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ גזירה בנקודה t ומתקיים כי

$$\frac{\partial F}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot \frac{\partial x_j}{\partial t_i}(t), \quad i = 1, \dots, k$$

בכתיב מטריצי:

$$\vec{\nabla} F(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1}(t) & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_k}(t) & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_k}(t) \end{pmatrix} \vec{\nabla} f(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

המטריצה מסומנת בדרך כלל בסימון $\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(t_1, \dots, t_k)}$ (לעיתים המטריצה המשוכללת מסומנת בסימון זה).

הערות:

- בכתיב מטריצי רואים שמדובר שוב בנוסחה של נגזרת חיצונית בנקודה המורכבת, מוכפלת בנגזרת הפנימית.
- ניתן להכליל עוד יותר, אם הפונקציה f היא פונקציה וקטורית (לתוך $\mathbb{R}^m$). עדיין נקבל את אותה צורה מטריצית של כפל, אבל הנגזרת של f ושל F יהיו מטריצות ולא וקטורים.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. רציפות במידה שווה ובמיוחד משפט קנטור היינה.
2. משפט לגרנז' מחדו"א ב'1.
3. המשפט היסודי של החדו"א.

“ The object of mathematics is the honor of the human spirit.

”

Carl Gustav Jacob Jacobi