

הרצאה 9: גזירות, נגזרות מכוונות

יוחאי מעין

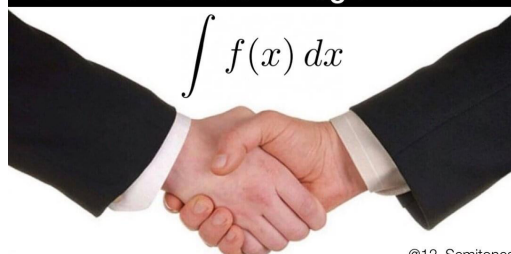
הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

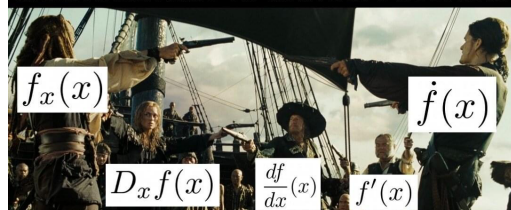
2	1 גזירות (המשך)
	1.1 גזירות גוררת קיום הנגזרות החלקיות, ניתנות לקירוב לינארי וכנ"ל עבור פונקציה בשלושה משתנים ויותר
2	1.2 נגזרות חלקיות רציפות גורר גזירות
5	1.3 נגזרות מכוונות
7	

Mathematicians on integral notation:



@12_Semitones

Mathematicians on derivative notation:



תזכורות

במקרה של פונקציה גזירה, הייצוג השימושי

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + \alpha(x, y) \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (1)$$

עם $\alpha(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} 0$

1 | גזירות (המשך)

1.1 גזירות גוררת קיום הנגזרות החלקיות, ניתנות לקירוב לינארי וכן"ל עבור פונקציה בשלושה משתנים ויותר

אריתמטיקה של גזירות

- משפט 1:** נניח כי שתי הפונקציות $f(x, y)$ ו- $g(x, y)$ גזירות בנקודה (x_0, y_0) .
1. לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, הפונקציה $\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)$ גזירה בנקודה (x_0, y_0) .
 2. הפונקציה $f(x, y) \cdot g(x, y)$ גזירה בנקודה (x_0, y_0) .
 3. אם $g(x_0, y_0) \neq 0$ אז הפונקציה $\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ גזירה בנקודה (x_0, y_0) .
- המשפט נכון כמובן גם עבור פונקציה של שלושה משתנים ויותר.

גזירות גוררת קיום נגזרות חלקיות

משפט 2: אם $f(x, y)$ גזירה בנקודה (x_0, y_0) , אז הנגזרות החלקיות שלה בנקודה קיימות והמספרים A, B מהגדרת הגזירות בהכרח מקיימים

$$\begin{cases} A = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \\ B = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \end{cases}$$

כלומר, A, B הם יחידים.**הערה:** כלומר, אם יש מישור משיק, אז זה באמת חייב להיות המישור המועמד שמצאנו בפעם הקודמת:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

בפרט, $\left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, -1 \right)$ הוא נורמל (מאונך) למישור המשיק.

גזירות כניתנות לקירוב לינארי וגזירות גוררת רציפות

ראינו ייצוג שימושי (1) עבור פונקציה גזירה:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + \alpha(x, y) \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

כאשר $\alpha(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} 0$ דרך אחרת לכתוב את זה:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)$$

זהו קירוב לינארי של $f(x, y)$ ליד (x_0, y_0) עם שגיאה מסדר גודל שקטן יותר מביטוי לינארי. לעיתים כדאי לתת שם לשגיאה:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + \varepsilon(x, y), \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{\varepsilon(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0 \quad (2)$$

כלומר,

$$\varepsilon(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) - A(x - x_0) - B(y - y_0)$$

נעיר שלפי המשפט, הקירוב הלינארי היחיד שיתכן לפונקציה הוא זה שבו מופיעות הנגזרות החלקיות.

האופן הזה של הצגת הגדרת הגזירות הוא האופן השימושי ביותר עבור ניצול תכונת הגזירות. הנה דוגמה לכך בהוכחת המשפט היסודי הבא. הדבר הראשון שמתבקש שנאמר עכשיו, הוא שגזירות גוררת רציפות.

משפט 3. אם $f(x, y)$ גזירה בנקודה (x_0, y_0) , אז היא רציפה בנקודה.

הגדרת הגזירות עבור פונקציה בשלושה משתנים ויותר

הגדרה: תהי $f(x, y, z)$ פונקציה שמוגדרת בסביבה של הנקודה (x_0, y_0, z_0) . נאמר ש- $f(x, y, z)$ גזירה בנקודה (x_0, y_0, z_0) אם קיימים $A, B, C \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \\ z \rightarrow z_0}} \frac{f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) - A(x - x_0) - B(y - y_0) - C(z - z_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} = 0$$

הפירוש בתור ניתנות לקירוב לינארי הוא כעת

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) + \alpha(x, y, z) \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}, \quad \alpha(x, y, z) \xrightarrow{(x, y, z) \rightarrow (x_0, y_0, z_0)} 0 \quad (3)$$

באותו אופן כמו לפונקציה בשני משתנים:

1. אם $f(x, y, z)$ גזירה בנקודה (x_0, y_0, z_0) אז הנגזרות החלקיות שלה קיימות בנקודה זו ובנוסף:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \quad C = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$$

2. אם $f(x, y, z)$ גזירה בנקודה (x_0, y_0, z_0) אז היא רציפה בנקודה זו.

באופן דומה, אומרים שפונקציה $f(x_1, \dots, x_n)$ היא גזירה בנקודה x_0 אם קיימים $A_1, \dots, A_n$ כך ש-

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^n A_k(x_k - x_{k,0})}{d(x, x_0)} = 0$$

ניתן להוכיח באותו אופן תכונות דומות.

דוגמאות

1. אנחנו נראה בקרוב שיש פונקציות רבות שאפשר לזהות מהר מאוד שהן גזירות. בינתיים, הנה דוגמה שבה חייבים פשוט לבדוק באופן ישיר שההגדרה מתקיימת:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

נראה שהיא גזירה בראשית.

נחשב קודם את הנגזרות החלקיות, כדי שנדע איזה ערכי A ו- B להציב בהגדרת הגזירות:

$$A = f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$B = f'_y(0, 0) = 0$$

נציב ונבדוק:

$$\frac{f(x, y) - f(0, 0) - Ax - By}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

בייצוג קוטבי, הביטוי הוא $r \cos^2 \theta \sin \theta$, שהוא פונקציה שואפת לאפס של r כפול פונקציה חסומה של θ . לכן הגבול הוא 0 והפונקציה גזירה בראשית.

2. ראינו שהפונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

אינה רציפה בראשית אך בעלת נגזרות חלקיות. כלומר, קיום נגזרות חלקיות לא גורר גזירות.

1.2 נגזרות חלקיות רציפות גורר גזירות

נגזרות חלקיות רציפות גורר גזירות

ראינו עד כה שגזירות גוררת רציפות וכן קיום נגזרות חלקיות.

משפט 4. אם הנגזרות החלקיות $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ של f שתיהן רציפות בנקודה (x_0, y_0) , אז $f(x, y)$ גזירה בנקודה (x_0, y_0) .

המשפט נכון באופן אנלוגי לפונקציה של מספר כלשהו של משתנים: אם כל הנגזרות החלקיות רציפות בנקודה מסוימת, אז הפונקציה גזירה בנקודה זו.

הערה: על מנת שהנגזרת החלקית $\frac{\partial f}{\partial x}$ תהיה רציפה בנקודה (x_0, y_0) , היא צריכה להיות מוגדרת בסביבתה. לכן המינימום הדרוש כדי שיהיה סיכוי להשתמש במשפט הוא שהנגזרות החלקיות יהיו קיימות בסביבת הנקודה (x_0, y_0) .

זה כמובן עדיין לא מספיק - דרושה גם רציפות של הנגזרות החלקיות.

זהו משפט שימושי במיוחד כי לפונקציות רבות התנאי מאוד קל לבדיקה.

דוגמאות:

$$1. \text{ ניקח } f(x, y, z) = \sin(xy^2z).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y^2 z \cos(xy^2z) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz \cos(xy^2z) \\ \frac{\partial f}{\partial z} = xy^2 \cos(xy^2z) \end{cases}$$

כולן רציפות בכל נקודה כהרכבות של פונקציות רציפות, ולכן $\sin(xy^2z)$ גזירה בכל נקודה ב- $\mathbb{R}^3$.

2. יש פונקציות גזירות שהנגזרות החלקיות שלהן לא רציפות, למשל

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

הנגזרות החלקיות לא רציפות כי לכל $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$f'_x(x, y) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2x(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

הביטוי הראשון הוא חסומה כפול שואפת לאפס עבור $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ולכן שואף לאפס. לביטוי השני אין גבול בראשית (למה?).

הפונקציה גזירה בראשית כי אם נשתמש ב- $A = B = 0$ (לא חישבנו את הנגזרות החלקיות בראשית, אבל לפי הגדרת הגזירות מספיק שקיימים A

(B-1) נקבל את הביטוי

$$\frac{(x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

לפי חסומה כפול שואפת לאפס.

סיכום גרירות

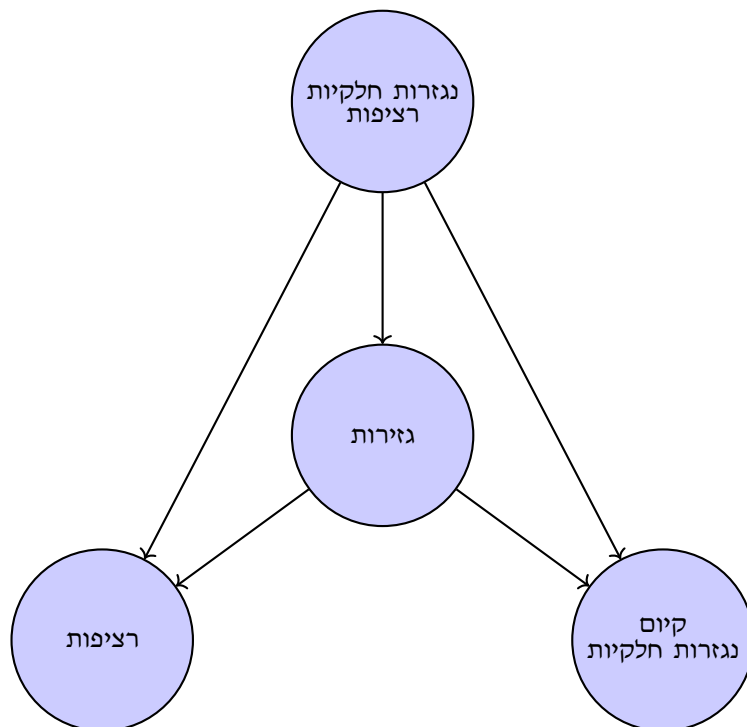
הגדרה: תהי $f(x, y)$ מוגדרת בסביבת הנקודה (x_0, y_0) . נאמר ש- $f(x, y)$ גזירה ברציפות בנקודה (x_0, y_0) אם שתי הנגזרות החלקיות שלה $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות בנקודה.

במקרה כזה נסמן $f \in C^1$, ובאופן כללי $f \in C^k$ אם כל הנגזרות החלקיות מסדר k רציפות בנקודה ("גזירה ברציפות k פעמים").

אם f גזירה ברציפות בכל נקודה של תחום D אז נסמן $f \in C^1(D)$.

הערה: הקבוצה $C^1(D)$ היא תת מרחב וקטורי של המרחב של כל הפונקציות $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, לפי כללי האריתמטיקה של גזירות.

נסכם את הגרירות הנכונות עבור תכונות אפשריות של f בנקודה:



כל הגרירות שלא מסומנות בתרשים, שגויות.

הגדרה של נגזרות מכוונות

הנגזרות החלקיות של פונקציה הן בעצם נגזרות בכיוונים של ציר ה- x וציר ה- y . אין שום חשיבות אמיתית לכיוונים הללו, ויש טעם להגדיר נגזרת בכל כיוון.

כדי להגדיר נגזרת בכיוון כללי $\hat{u} = (u_1, u_2)$ ($u_1^2 + u_2^2 = 1$); זה לא הכרחי אבל זאת המשמעות של "כיוון": וקטור יחידה, צריך להבין מה האנלוג של $f(x, y_0)$.

התקרבות ל- (x_0, y_0) מהכיוון $\hat{u}$ היא התקרבות על נקודות שנמצאות על הישר המתאים:

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1, \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$$

לכן ערכי הפונקציה המתאימים הם $f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)$.

דוגמה: ניקח את הפונקציה $f(x, y) = \sin(x + y)$ ליד הנקודה $(0, 0)$, ואת הכיוון $\hat{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

הערכים של f בכיוון $\hat{u}$ הם

$$\varphi(t) := f\left(0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot t, 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot t\right) = \sin(\sqrt{2}t)$$

לכן $\varphi'(0) = \sqrt{2}$. כלומר, קצב השינוי הרגעי של f ליחידת $\hat{u}$ הוא $\sqrt{2}$.

הגדרה 5. תהי $f(x, y)$ מוגדרת בסביבה של הנקודה (x_0, y_0) , ויהי $\hat{u}$ וקטור יחידה. הנגזרת המכוונת של $f(x, y)$ בכיוון $\hat{u}$ מוגדרת (אם היא קיימת) על ידי

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \hat{u}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

המשמעות של $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(x_0, y_0)$ היא: קצב שינוי רגעי של f אם זזים מהנקודה (x_0, y_0) בכיוון $\hat{u}$.

דיוק: מדובר בנגזרת של

$$\varphi(t) = f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)$$

בנקודה $t = 0$.

דוגמאות:

1. ניקח למשל את $f(x, y) = xy$ ו- $\hat{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$f\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) = 2 + \frac{3}{\sqrt{2}}t + \frac{t^2}{2}$$

ולכן

$$\frac{\partial f(1, 2)}{\partial \hat{u}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

2. נתונה

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

אז לכל $\hat{u} = (u_1, u_2)$ וקטור יחידה מתקיים כי

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + tu_1, 0 + tu_2) - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{tu_1 \cdot tu_2}{t^2 u_1^2 + t^2 u_2^2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_1 u_2}{t}$$

לכן הנגזרת המכוונת קיימת אם ורק אם $\hat{u} = (\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ ובמקרים אלו היא שווה לאפס.

אלו בעצם הנגזרות החלקיות.

3. נתונה

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

לכל $\hat{u} = (a, b)$ וקטור יחידה, נגדיר

$$\varphi(t) = f(at, bt) = \begin{cases} \frac{a^2 b t^3}{a^4 t^4 + b^2 t^2} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

לכן

$$\varphi(t) = \frac{a^2 b t}{a^4 t^2 + b^2} \Rightarrow \varphi'(t) = \frac{a^2 b (a^4 t^2 + b^2) - a^2 b t \cdot 2a^4 t}{(a^4 t^2 + b^2)^2}$$

לכן

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0, 0) = \varphi'(0) = \frac{a^2}{b}$$

כלומר, הנגזרת המכוונת קיימת בכל כיוון.

מצד שני, ראינו בעבר שפונקציה זו אינה רציפה בראשית (ולכן אינה גזירה).

הערות לגבי נגזרות מכוונות

1. עבור $\hat{u} = (1, 0)$ מתקבלת הנגזרת החלקית לפי x :

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

באופן דומה, עבור $\hat{u} = (0, 1)$ מתקבלת הנגזרת החלקית לפי y .2. מעניין לשים לב שעבור $\hat{u} = (-1, 0)$ מתקבל

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cdot (-1), y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

לכן לפי גבול של הרכבה עם $h = -t$,

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{-h} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

כלומר, יש רגישות אמיתית לכיוון.

3. ההגדרה אומרת: הגדירו את הפונקציה במשתנה יחיד $\varphi(t) = f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)$, וגזרו אותה בנקודה $t = 0$. לעיתים נוח לפעול באופן הזה (במקום להשתמש בגבול).

4. בדרך כלל נמנע מלכתוב $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}$ אם $\vec{u}$ אינו וקטור יחידה. הסיבה העיקרית היא שיש שתי גישות להגדרה במקרה של וקטור שאינו וקטור יחידה:

(א) הגדרה באמצעות אותו ביטוי כנ"ל. במקרה כזה, עבור $\vec{u} = (3, 0)$ למשל מתקבל $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = 3f'_x$.

(ב) מוסכמה שמנרמלים קודם את $\vec{u}$. במקרה כזה, עבור $\vec{u} = (3, 0)$ למשל מתקבל $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = f'_x$.

המקרה של וקטור שאינו וקטור יחידה לא יהיה חשוב לנו במיוחד ולכן נמנע מלקחת צד בויכוח הזה, אם כי הסדר הנ"ל בין שתי הגישות נבחר לא במקרה.

5. ראינו שקיום נגזרות חלקיות בכל כיוון לא גורר רציפות, ובפרט לא גורר גזירות.

חישוב של נגזרות מכוונות

יש בכל זאת פער ברמה הטכנית בין הנגזרות החלקיות לבין נגזרות מכוונות בכיוונים כלליים: זה הרבה יותר קצר לחשב נגזרת חלקית, כי אין שלב ביניים של להציב ביטוי מורכב במקום x ו- y . מתייחסים לאחד כקבוע וגוזרים לפי השני. המשפט הבא נותן נוסחה פשוטה שמאפשר לחשב נגזרת מכוונת בכיוון כללי בעזרת הנגזרות החלקיות, בלי לעבור דרך ההגדרה של הנגזרת המכוונת.

בנוסף, יש לו השלכות משמעותיות ומפתיעות.

משפט 6. תהי $f(x, y)$ גזירה בנקודה (x_0, y_0) . אז לכל כיוון $\hat{u}$ מתקיים שהנגזרת המכוונת בכיוון $\hat{u}$ קיימת, והיא נתונה על ידי

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)u_1 + f'_y(x_0, y_0)u_2$$

דוגמאות:

1. ניקח למשל $f(x, y) = xy$. זו פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות $\frac{\partial f}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$ (בכל נקודה) ולכן היא גזירה.

לכן למשל עבור $\hat{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(1, 1) = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

2. הנוסחה מאוד שימושית וקלה לשימוש ולכן אפשר לשכוח שהיא לא תמיד נכונה. למשל, עבור $f(x, y) = \sqrt[3]{xy^2}$ בראשית.

נחשב נגזרת מכוונת בכיוון כללי $\hat{u} = (u_1, u_2)$. אפשר להמנע מגבול - נגדיר

$$\varphi(t) = f(tu_1, tu_2) = \sqrt[3]{t^3 u_1 u_2^2} = \sqrt[3]{u_1 u_2^2} \cdot t$$

לכן

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0, 0) = \varphi'(0) = \sqrt[3]{u_1 u_2^2}$$

כלומר, $f'_x = 0$ (מתקבל עבור $\hat{u} = (1, 0)$) ו- $f'_y = 0$ ($\hat{u} = (0, 1)$), וברור שלמשל
עבור $\hat{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0, 0) \neq f'_x u_1 + f'_y u_2$$

אם הנוסחה נכשלת, סימן שהפונקציה לא גזירה בראשית.

נגזרות מכוונת עבור פונקציה של שלושה משתנים ויותר

הגדרה: תהי $f(x, y, z)$ מוגדרת בסביבה של הנקודה (x_0, y_0, z_0) , ויהי $\hat{u}$ וקטור יחידה. הנגזרת המכוונת של $f(x, y, z)$ בכיוון $\hat{u}$ מוגדרת (אם היא קיימת) על ידי

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2, z_0 + tu_3) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

משפט 7: תהי $f(x, y, z)$ גזירה בנקודה (x_0, y_0, z_0) . אז לכל כיוון $\hat{u}$ מתקיים שהנגזרת המכוונת בכיוון $\hat{u}$ קיימת, והיא נתונה על ידי

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0) u_1 + f'_y(x_0, y_0, z_0) u_2 + f'_z(x_0, y_0, z_0) u_3$$

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:
1. כלל השרשרת לגזירה של פונקציה מורכבת מחדו"א ב'.

“ An oath could be broken, but a promise? A promise stood as long as you were still trying.

”

Brandon Sanderson, Wind and Truth