

הרצאה 8: רציפות וגזירות

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1 רציפות
2	1.1 רציפות בנקודה
3	1.2 רציפות
5	2 גזירות
5	2.1 נגזרות חלקיות
8	2.2 גזירות עבור פונקציה בשני משתנים



רציפות

1

1.1 רציפות בנקודה

הגדרה של רציפות בנקודה

נגדיר רציפות בנקודה באופן דומה לפונקציות במשתנה יחיד. נראה שזהו מושג טיפה תמים ופשוט מדי במספר משתנים. בכל זאת, במקרים מספיק פשוטים, זה בכל זאת מעניין. נרחיב מיד.

הגדרה 1. תהי $f(x, y)$ מוגדרת בסביבת הנקודה (x_0, y_0) . נאמר שהפונקציה f רציפה בנקודה (x_0, y_0) אם הגבול בנקודה קיים ובנוסף

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

באותו אופן, $f(x, y, z)$ רציפה בנקודה (x_0, y_0, z_0) אם היא מוגדרת בסביבתה וכן

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \\ z \rightarrow z_0}} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$$

כנ"ל עבור $f(x_1, \dots, x_n)$ בנקודה $(x_{0,1}, \dots, x_{0,n})$.

דוגמאות:

1. הפונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

רציפה בראשית שכן ראינו בעבר כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0$ בעזרת ייצוג קוטבי.

2. הפונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

לא רציפה בראשית שכן ראינו בעבר כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ אינו קיים. לכן גם אף בחירה של ערך אחר בראשית לא תהפוך אותה לרציפה.

תכונות בסיסיות של רציפות

משפט 2:

1. אריתמטיקה של רציפות: נניח כי f ו- g רציפות בנקודה $x = (x_1, \dots, x_n)$

א. הפונקציה $f + g$ רציפה בנקודה x

ב. הפונקציה fg רציפה בנקודה x .

ג. אם $g(x) \neq 0$ אז הפונקציה $\frac{f}{g}$ רציפה בנקודה x .

2. רציפות בלשון סדרות: (היינה לרציפות) אם $f(x)$ מוגדרת בסביבה של הנקודה x_0 אז f רציפה בנקודה x_0 אם ורק אם לכל סדרה $x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0$ מתקיים כי $f(x^{(k)}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x_0)$.

3. רציפות של הרכבה: אם $f(x)$ רציפה בנקודה x_0 ו- $x_1(t), \dots, x_n(t)$ רציפות בנקודה t_0 כך שמתקיים

$$(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) = x_0$$

אז $f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ רציפה בנקודה t_0 .

הערה: ה- t ברציפות של הרכבה יכול להיות רב ממדי. כלומר, $x_1(t)$ למשל יכולה להיות למעשה פונקציה של מספר משתנים.

דוגמאות:

1. הפונקציה $f(x, y) = e^{xy}$ רציפה בנקודה $(0, 0)$.

הפונקציות $x(t) = \sin(t-2)$, $y(t) = \cos(t-2) - 1$ רציפה בנקודה $t = 2$.

לכן הפונקציה המורכבת

$$f(x(t), y(t)) = e^{\sin(t-2) \cdot (\cos(t-2) - 1)}$$

רציפה בנקודה $t = 2$.

2. עבור אותה $f(x, y) = e^{xy}$, אפשר לבחור למשל

$$x(u, v) = uv, \quad y(u, v) = u + v$$

נקבל שהפונקציה המורכבת

$$f(x(u, v), y(u, v)) = e^{uv(u+v)}$$

רציפה.

1.2 רציפות

הגדרת הרציפות

בסעיף הזה נדבר על רציפות בקבוצה. גם במקרה הרב-ממדי, נצפה לזה שכל פונקציה אלמנטרית היא רציפה בכל נקודה שבה היא מוגדרת. למשל, $f(x, y) = \sin(x + y)$.

בכל זאת, באמירה הזו יש בעיה: מה קורה למשל אם $f(x, y) = \sqrt{x+y}$? במקרה החד-ממדי, פונקציה כמו $f(x) = \sqrt{x}$ רק רציפה מימין בנקודה $x = 0$.

במקרה הרב-ממדי אין רק ימין או שמאל, ונראה שזה לא נכון להתמקד רק בכיווני התקדמות. הרעיון של ההגדרה הוא מאוד פשוט, עד כדי כך שיש סכנה לפספס את ההבדל בינה לבין ההגדרה הרגילה של הרציפות.

הגדרה: תהי $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ כאשר $A \subset \mathbb{R}^n$. נאמר ש- f רציפה בקבוצה A אם לכל $x_0 \in A$ מתקיים התנאי לרציפות: לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $y \in A$ שמקיימת $d(x, y) < \delta$ מתקיים כי $d(f(x), f(y)) < \epsilon$.

איפה ההבדל בין זה לבין רציפות בכל נקודה של A ?

הפונקציה f לא חייבת להיות מוגדרת בסביבת אף נקודה של A . בהגדרה כתוב "לכל $(x, y) \in A$ ", במקום "לכל (x, y) בסביבת (x_0, y_0) ". כלומר, מצטמצמים ומסתכלים על A בלבד. במובן הזה, מושג הגבול מוגבל בהיבט של הגדרת הרציפות.

ברוב הדוגמאות שנראה, $n = 2$ ו- $m = 1$.

בכל זאת, אם למשל $n = 1$, $A = [0, 1]$ ו- $m = 1$, כלשהו, זה מגדיר עקום / מסלול רציף ב- $\mathbb{R}^m$:

$$f(t) \equiv \gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$$

גם זה מקרה חשוב.

הערה: אם $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, אז f רציפה אם ורק אם $f_1, \dots, f_m$ רציפות.

הקשר בין רציפות בנקודה לבין רציפות בקבוצה

אם (x_0, y_0) נקודה פנימית של קבוצה שבה f רציפה, אז f רציפה בנקודה (x_0, y_0) במובן הפשוט הנ"ל. מצד שני, כפי שראינו, אם U אינה קבוצה פתוחה אז יש פונקציות אשר רציפות ב- U אבל לא מוגדרת בסביבה של נקודות שאינן פנימיות. לכן, באופן כללי רציפות ב- U אינה גוררת רציפות בכל נקודה של U במובן הנ"ל.

דוגמה: הפונקציה $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ רציפה בכל נקודה בעיגול היחידה הפתוח $x^2 + y^2 < 1$ אבל אינה רציפה בנקודות השפה $x^2 + y^2 = 1$ היות שהיא אינה מוגדרת בסביבתן.

מצד שני, היא רציפה בעיגול היחידה הסגור $x^2 + y^2 \leq 1$ במובן של רציפות בקבוצה.

משפט 3: תהי U קבוצה פתוחה. אז f רציפה ב- U אם ורק אם היא רציפה בכל נקודה של U .

תכונות בסיסיות של רציפות

משפט 4:

1. אריתמטיקה של רציפות: נניח כי f ו- g רציפות בקבוצה A .

א. הפונקציה $f + g$ רציפה בקבוצה A .

ב. הפונקציה fg רציפה בקבוצה A .

- ג. אם $g(x) \neq 0$ אז הפונקציה $\frac{f}{g}$ רציפה בקבוצה A .
2. רציפות בלשון סדרות: (היינה לרציפות) אם $f(x)$ מוגדרת בקבוצה A , אז רציפה בקבוצה A אם ורק אם לכל $x_0 \in A$ ולכל סדרה $x_0 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x^{(k)} \in A$ מתקיים כי $f(x_0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(x^{(k)})$.
3. רציפות של הרכבה: אם $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ רציפה, ו- $g: B \rightarrow \mathbb{R}^k$ רציפה כאשר B מכילה את התמונה של f ($f(A) \subset B$), אז ההרכבה $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ רציפה.
- למשל, ביטויים כמו $f(x(t), y(t))$, $f(t(x, y))$, וכן $f(u(x, y), v(x, y))$ יהיו רציפים בתנאי שהפונקציות שהם מורכבים מהם רציפות.

משפטי יסוד של פונקציות רציפות

- משפט 5:** תהי $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ רציפה בקבוצה סגורה וחסומה A . אז f חסומה ב- A . בנוסף, אם $n = 1$ אז f מקבלת ב- A מינימום ומקסימום.
- ההוכחה דומה למקרה של משתנה יחיד.
- משפט ערך הביניים נראה מעט שונה בדו-ממד, היות ויש פחות משמעות לנקודת שנמצאת "בין" שתי נקודות נתונות. בכל זאת, זהו משפט יסודי וחשוב של פונקציות רציפות.
- משפט 6:** תהי $f(x, y)$ רציפה בתחום בקבוצה קשירה מסילתית D . תהיינה $P, Q \in D$ שתי נקודות. אז לכל ערך α בין $f(P)$ לבין $f(Q)$ קיימת נקודה $S \in D$ כך ש- $f(S) = \alpha$.

2 | גזירות

2.1 נגזרות חלקיות

הגדרה של הנגזרות החלקיות עבור פונקציה בשני משתנים

במשתנה יחיד, הגבול היה המושג היסודי אבל הנגזרת הייתה המושג העיקרי. יש דרך הגיונית להכליל את הנגזרת לפונקציה בשני משתנים $f(x, y)$, אבל כפי שנראה הסיפור קצת יותר מסובך.

דוגמה: אם נתונה פונקציה כמו $f(x, y) = x^2y + 3x$, אפשר "לגזור אותה לפי x ":

$$f'_x = 2xy + 3$$

התייחסנו ל- y כקבוע, או פרמטר. אפשר גם לגזור לפי y ,

$$f'_y = x^2$$

הפעולות הללו פשוטות מאוד והן יהיו חשובות לנו.

הגדרה 7. תהי $f(x, y)$ מוגדרת בסביבה של הנקודה (x_0, y_0) .

הנגזרת החלקית של $f(x, y)$ לפי x בנקודה (x_0, y_0) מוגדרת (אם היא קיימת) לפי

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \equiv f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

באופן דומה, הנגזרת החלקית של $f(x, y)$ לפי y בנקודה (x_0, y_0) מוגדרת (אם היא קיימת) לפי

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \equiv f'_y(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

הערות:

- כלומר, ההגדרה אומרת: הציבו $y = y_0$, ואז נותרה פונקציה רק של x ; גזרו אותה כפונקציה במשתנה יחיד.
- מבחינה גיאומטרית, אם נצייר על הגרף את העקום $(x, y_0, f(x, y_0))$ שהוא החתך של הגרף עם המישור $y = y_0$ שמקביל למישור xz , אז $f'_x(x_0, y_0)$ היא השיפוע של ישר משיק לגרף הזה בתוך המישור $y = y_0$.
- בהסתכלות אחרת, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ הוא קצב השינוי הרגעי בפונקציה כאשר משנים את x בלבד מהנקודה (x_0, y_0) .

הגדרה של הנגזרות החלקיות עבור פונקציה בשלושה משתנים

עבור $f(x, y, z)$, ההגדרה אנלוגית לגמרי.

הגדרה: תהי $f(x, y, z)$ מוגדרת בסביבה של הנקודה (x_0, y_0, z_0) .

הנגזרת החלקית של $f(x, y, z)$ לפי x בנקודה (x_0, y_0, z_0) מוגדרת (אם היא קיימת) לפי

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \equiv f'_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

הנגזרת החלקית של $f(x, y, z)$ לפי y בנקודה (x_0, y_0, z_0) מוגדרת (אם היא קיימת) לפי

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} \equiv f'_y(x_0, y_0, z_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{k}$$

הנגזרת החלקית של $f(x, y, z)$ לפי z בנקודה (x_0, y_0, z_0) מוגדרת (אם היא קיימת) לפי

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \equiv f'_z(x_0, y_0, z_0) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0)}{l}$$

דוגמה: נניח כי $f(x, y, z) = \sin(xy^2z)$.

$$\begin{cases} f'_x = y^2z \cos(xy^2z) \\ f'_y = 2xyz \cos(xy^2z) \\ f'_z = xy^2 \cos(xy^2z) \end{cases}$$

נגזרות חלקיות מסדר גבוה ומשפט שוורץ

נעיר שבאופן דומה לנגזרות מסדר גבוה $f^{(n)}(x)$, אפשר לגזור פונקציה $f(x, y)$ מספר פעמים לפי כל מיני משתנים.

הגדרה: תהי $f(x, y)$ פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה (x_0, y_0) . אם הנגזרת החלקית $\frac{\partial f}{\partial x}$ קיימת בסביבה של הנקודה (x_0, y_0) , הנגזרת השנייה המעורבת מוגדרת (אם היא קיימת) על ידי

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

הערה: בעצם, על מנת שאפשר יהיה לדבר על הגבול המגדיר את $\frac{\partial f}{\partial x}$ (למשל), מספיק ש- f תהיה מוגדרת בנקודות (x, y_0) עבור x בסביבת x_0 .

כנ"ל עבור f_{xx} וכו'.

באותו אופן,

$$\begin{cases} f''_{xx} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \\ f''_{yy} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \end{cases}$$

וכו'. כנ"ל עבור $f(x, y, z)$.

דוגמה:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 (x^3y^2+xy)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (2x^3y + x) = 6x^2y + 1, \\ \frac{\partial^2 (x^3y^2+xy)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2y^2 + y) = 6x^2y + 1, \end{cases}$$

מתברר שסדר הגזירה יכול להשפיע, אבל:

משפט 8: נניח שהנגזרות החלקיות f''_{xy} ו- f''_{yx} קיימות ורציפות בנקודה (x_0, y_0) . אז הן שוות:

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

זה נקרא משפט שוורץ.

באותו אופן מגדירים למשל $f^{(7)}_{xxyzyxy}$, ומשפט שוורץ ניתן להכללה מתאימה. למשל, $f^{(5)}_{xxyyx} = f^{(5)}_{xxxyy}$ (אבל בדרך כלל $f^{(5)}_{xxyyx} \neq f^{(5)}_{xxxxx}$).

הערה: אפשר לכתוב f_x במקום f'_x (וכן הלאה).

הנגזרות החלקיות אינן תחליף מוצלח לנגזרת

האם הנגזרות החלקיות הן תחליף מספק לנגזרת? מהסתכלות בשרטוט של מה שהן מייצגות, אפשר לראות שזה לא סביר. למשל, כל ערכי הפונקציה מחוץ לשני הישרים הניצבים $x = x_0$ ו- $y = y_0$ לא רלוונטיים להגדרת הנגזרות החלקיות.

ובאמת, בחרנו שני כיוונים שאנחנו אוהבים - x ו- y , והגדרנו נגזרות בכיוונים אלו. אבל הם לא באמת מיוחדים, ויש עוד כיוונים רבים. אין סיבה שגזירות בכיוונים x ו- y תשליך על גזירות בכיוון $\hat{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ למשל.

אנחנו נגדיר נגזרת בכיוון כללי בהמשך, אבל יתברר שגם אז הדוגמה הבאה תהיה כקוץ בצידנו.

דוגמאות:

1. ראינו כבר שלביטוי $\frac{xy}{x^2+y^2}$ אין גבול בראשית. בכל זאת, אם נגדיר

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

נקבל תופעה מרגיזה: הנגזרות החלקיות שלה בראשית קיימות. ואכן,

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

בעצם, לא צריך אפילו גבול, אפשר לחשב יותר בקלות. נדגים על הנגזרת החלקית לפי y . לכל y מתקיים $f(0, y) \equiv 0$. לכן $f'_y(0, 0) = 0$.

יש לנו אם כך פונקציות שהנגזרות החלקיות שלהן קיימות, אבל הן לא רציפות. זה לא טוב.

2. יש כמובן גם להיפך, פונקציות רציפות שהנגזרות החלקיות שלהן לא קיימות. אבל זה לא מפתיע. למשל, $f(x, y) = |x| + |y|$, בוודאי רציפה בכל המישור. מנגד, $f(x, 0) = |x|$ לא גזירה ולכן $f'_x(0, 0)$ לא קיימת.

2.2 גזירות עבור פונקציה בשני משתנים

ישר משיק עבור גרף של $f(x)$

בסעיף הקודם ראינו שהמושג הפשוט של נגזרות חלקיות עבור $f(x, y)$ לא מספיק בתור תחליף לגזירות של $f(x)$. נתקלנו במשהו דומה בעבר: רציפות מכל כיוון לא מספיקה לרציפות.

מה אם כך תחליף ראוי לגזירות? כדי להבין, נזכיר ש- $f(x)$ גזירה בנקודה אם ורק אם קיים ישר משיק בנקודה המתאימה על הגרף.

מה זה אומר שקיים ישר משיק? מה מייחד את הישר $y = A(x - x_0) + f(x_0)$ כאשר $A = f'(x_0)$ דווקא?

התשובה היא ב"טיב הקירוב". הישר המשיק הוא היחיד שקרוב ביותר לפונקציה ליד $x = x_0$ במובן של סדרי גודל. נסביר.

פונקציה $f(x)$ היא רציפה בנקודה x_0 אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$. כלומר, ליד $x = x_0$, $f(x)$ קרוב ל- $f(x_0)$. אפשר לכתוב את זה גם כך: $f(x) = f(x_0) + o(1)$.

$f(x)$ גזירה אם

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

מה שאומר ש-

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + o(1)$$

על ידי סידור מחדש נקבל מדד לטיב הקירוב של המשיק לפונקציה ליד $x = x_0$:

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = o(x - x_0)$$

הישר המשיק $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ הוא הישר היחיד שמקיים את הקשר הזה עבור $x \rightarrow x_0$. קל מאוד לבדוק שאם איזשהו ישר $y = A(x - x_0) + f(x_0)$ (שעובר דרך הנקודה $(x_0, f(x_0))$) מקרב את $f(x)$ עד כדי $o(x - x_0)$, אז f גזירה בנקודה x_0 ו- $A = f'(x_0)$.

דרך אחרת להסתכל על $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ היא שיש אפשרות לקרב את $f(x)$ באמצעות ביטוי לינארי, כך שהשגיאה היא "תת-לינארית". זה רעיון מאוד שימושי כי קירוב לינארי זה אחלה.

מישור משיק

מהו המושג האנלוגי של ישר משיק לגרף אם עוסקים בפונקציה $f(x, y)$? אפשר לראות בציור שיש הרבה כיוונים שמשיקים למשטח $z = f(x, y)$. מתברר שהם מרכיבים מישור.

כדי להבין מי זה המישור הזה, נסתכל שוב על שני החתכים $z = f(x, y_0)$ ו- $z = f(x_0, y)$. זה ברור שלראשון יש ישר משיק בתוך המישור $y = y_0$ שנתון על ידי

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0)$$

באופן דומה, לשני ישר משיק בתוך המישור $x = x_0$:

$$z = f(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

אפשר להציג את שני הישרים הללו בייצוג פרמטרי כדי להבין מה יכולים להיות וקטורי כיוון עבורם:

$$\begin{cases} x = t, & y = y_0, & z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(t - x_0), \\ x = x_0, & y = t, & z = f(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)(t - y_0), \end{cases}$$

לכן שני הווקטורים $(1, 0, f'_x)$ ו- $(0, 1, f'_y)$ משיקים לגרף. כלומר, נורמל לגרף נתון על ידי

$$(1, 0, f'_x) \times (0, 1, f'_y) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = (-f'_x, -f'_y, 1)$$

בסך הכל, מועמד למישור המשיק הוא

$$-f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z - f(x_0, y_0) = 0$$

נעיר שהמישור המשיק אמור להכיל בעצם כל משיק לכל עקום שמוכל במשטח. במובן מסוים, אפשר לחשוב על המשפט האחרון כהגדרה סבירה של המישור המשיק. אנחנו נגדיר אותו באופן שונה: מישור שמקרב את $f(x, y)$ ליד (x_0, y_0) כך שהשגיאה היא תת-לינארית.

הגדרת הגזירות עבור פונקציה בשני משתנים

אנחנו כעת מוכנים להגדיר גזירות של פונקציה $f(x, y)$, האנלוג הראוי לגזירות של פונקציה במשתנה יחיד.

הגדרה 9. תהי $f(x, y)$ פונקציה שמוגדרת בסביבה של הנקודה (x_0, y_0) . נאמר ש- $f(x, y)$ גזירה (או דיפרנציאבילית) בנקודה (x_0, y_0) אם קיימים $A, B \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - A(x - x_0) - B(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

כלומר, אם קיים מישור משיק לגרף של הפונקציה בנקודה $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. בהסתכלות אחרת, אם אפשר לקרב את הפונקציה לינארית כך שהשגיאה היא תת-לינארית: נסמן

$$\alpha(x, y) = \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - A(x - x_0) - B(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$$

הפונקציה גזירה בנקודה ולכן $\alpha(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} 0$. בנוסף, מתקיים הייצוג השימושי

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + \alpha(x, y) \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (1)$$

הביטוי $f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)$ הוא לינארי, והשארית שואפת לאפס מהר במיוחד. באופן הזה, גזירות היא ניתנות לקירוב לינארי.

הערה: הגדרנו גזירות של פונקציה $f(x, y)$ בנקודה אבל בניגוד לפונקציות במשתנה יחיד, לא הגדרנו נגזרת.

אין לבלבל בין "נגזרת" לבין נגזרות חלקיות. נדבר על הנגזרת בהמשך.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. תכונות של פונקציות גזירות בחזו"א ב'1.
2. נגזרות חד צדדיות והקשר שלהן לגזירות.

“ This is just a moment in time. Step aside and let it happen.

”

Inara, Firefly