

הרצאה 7: גבול של פונקציה במספר משתנים

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1	גבול של פונקציה במספר משתנים
2	1.1	קווי גובה, משטחי רמה ומשטחים ריבועיים
6	1.2	הגדרת הגבול ותכונות בסיסיות, גבול על מסלול
12	1.3	גבול נשנה וגבול בעזרת ייצוג קוטבי



1 | גבול של פונקציה במספר משתנים

1.1 קווי גובה, משטחי רמה ומשטחים ריבועיים

גרף של פונקציה בשני משתנים

לאחר הכנה של טופולוגיה, מטריקה ועוד, אנחנו מוכנים להתחיל ללמוד על פונקציות בשני משתנים $f(x, y)$ ויותר.

באופן כללי, רוב מה שנעשה עובד היטב עבור **פונקציה סקלרית** $f(x_1, \dots, x_n)$. כלומר, $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$.

באופן מדויק יותר, נעסוק בפונקציות מהסוג $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ כאשר $D \subset \mathbb{R}^n$. כלומר, הפונקציה יכולה להיות מוגדרת באיזושהי קבוצה חלקית D של $\mathbb{R}^n$. לא נעסוק בפונקציות וקטוריות להוציא מקרה או שניים שבהם זה יתבקש.

אנחנו נתמקד במקרים $n = 2, 3$ כמעט תמיד, כלומר פונקציות $f(x, y)$ וכן $f(x, y, z)$. שימו לב שמקרים אלו לא נסמן בדרך כלל x_1, x_2 או x_1, x_2, x_3 כי יש מספיק אותיות וזה יותר נוח.

הגדרה: גרף של פונקציה בשני משתנים $f(x, y)$ מוגדר על ידי

$$G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$$

זה אובייקט דו ממדי אשר "חי" במרחב התלת ממדי.

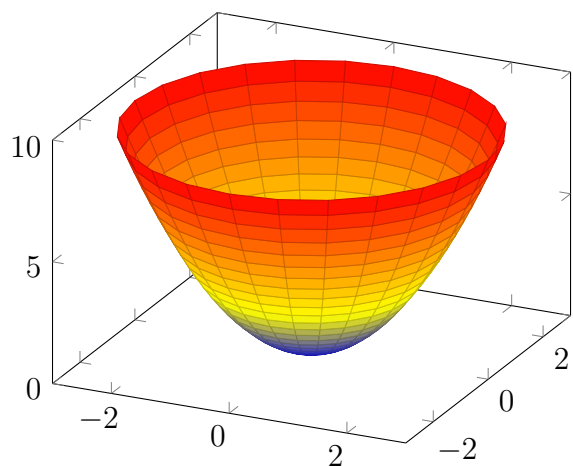
דוגמאות:

1. ניקח את הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2$. הגרף הוא $z = x^2 + y^2$.

החתך עם z קבוע הוא:

- אם $z > 0$, זה מעגל ברדיוס $\sqrt{z}$.
 - אם $z = 0$, זו נקודה בודדת.
 - אם $z < 0$, זו קבוצה ריקה (אין חתך).
- החתך עם $x = 0$ הוא $z = y^2$, שזו פרבולה.

נצייר את המשטח. הוא מכונה **פרבולואיד אליפטי** (בעצם, מעגלי).

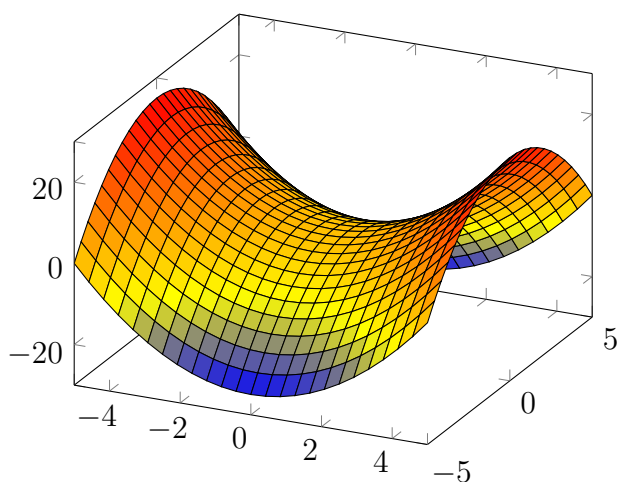


2. ניקח כעת את הפונקציה $f(x, y) = x^2 - y^2$.

החתך עם מישור xz , כלומר כאשר $y = 0$, הוא פרבולה "מחייכת" $z = x^2$.

החתך עם מישור yz , כלומר כאשר $x = 0$, הוא פרבולה "בוכה" $z = -y^2$.

נצייר את המשטח. הוא מכונה **פרבולואיד היפרבולי** (לעיתים נקרא גם **אוכף**).



הערה: זה לפעמים קשה, אבל מבחינה עקרונית אפשר לצייר גרף של פונקציה בשני משתנים $f(x, y)$. כמו שכבר אמרנו וראינו בדוגמה של הפרבולואיד, גרף של $f(x, y)$ "חי" במרחב $\mathbb{R}^3$.

באופן אנלוגי, גרף של פונקציה בשלושה משתנים $f(x, y, z)$ חי ב- $\mathbb{R}^4$, שאנחנו לא מסוגלים לדמיין או לצייר. לכן יש פה קפיצת הבנה משמעותית נוספת על פני הקפיצה ממשתנה יחיד לשני משתנים: קפיצה מיכולת לדמיין לאי-יכולת לדמיין.

מסיבה זו רוב הדוגמאות והעיסוק העיקרי יהיה עם פונקציות של שני משתנים $f(x, y)$. בכל זאת, המושג הבא שהוא גם גרפי ניתן להכללה לפונקציות של שלושה משתנים, ועדיין אפשר לדמיין אותו עבור $f(x, y, z)$.

קווי גובה

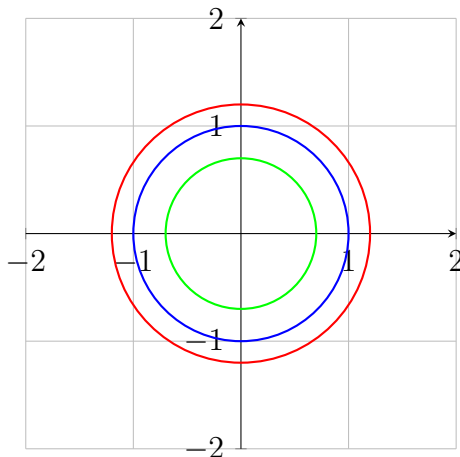
לפעמים קשה לצייר גרף של פונקציה $f(x, y)$. בדרך כלל יותר קל לצייר את הקווים הבאים.

הגדרה: תהי $f(x, y)$ פונקציה בשני משתנים. קו גובה של f הוא קבוצה מהצורה $f(x, y) = c$ כאשר $c \in \mathbb{R}$ קבוע.

דוגמאות:

1. נצייר קווי גובה של $f(x, y) = x^2 + y^2$. אלו הם $x^2 + y^2 = c$.

רואים מקווי הגובה שהראשית היא נקודת מינימום.



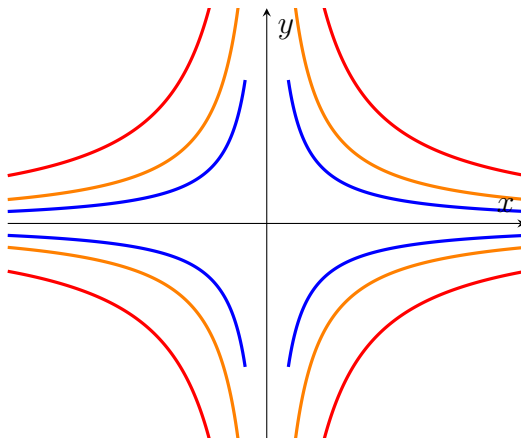
2. ניקח את $f(x, y) = xy$. קווי הגובה הם $xy = c$.

עבור $c = 0$ מתקבלים שני הצירים $x = 0$ וכן $y = 0$.

עבור $c = 1$ מקבלים $y = \frac{1}{x}$, שמורכב משני קווים.

עבור $c = 2$ התמונה דומה אך רחוקה יותר מהראשית.

יש גם אפשרות ש- c יהיה שלילי: עבור $c = -1$ נקבל $y = -\frac{1}{x}$. אלו שני קווים ברביעים 2 ו-4, וכו'.



אפשר לראות מהציר שהראשית כאן אינה נקודת מינימום ואינה נקודת מקסימום. בעתיד נקרה לזה אוכף.

הערות:

• כמו שאפשר לראות בדוגמה, קו גובה הוא לא באמת תמיד קו. למשל, $x^2 + y^2 = 0$ מתאר נקודה בודדת.

דוגמה קיצונית יותר היא פונקציה קבועה, שעבורה יש "קו גובה" שהוא כל המישור.

בכל זאת, לרוב קווי הגובה הם באמת קווים. אפשר גם להגדיר קו גובה באופן קצת שונה: עקום רציף הוא קו גובה אם הפונקציה קבועה עליו, $f(x(t), y(t))$ לא תלוי ב- t .

אין לזה חשיבות גדולה ובמילא נשתמש בקווי גובה כשלב ביניים לציור הגרף או הבנת הגרף של הפונקציה.

• קו גובה אמנם קשור לערכי הפונקציה, אבל הוא נמצא בתחום ההגדרה של הפונקציה.

משטחי רמה

הגרף של פונקציה בשלושה משתנים הוא

$$\{(x, y, z, w) : w = f(x, y, z)\}$$

זו תת קבוצה של $\mathbb{R}^4$ ולכן חסרת תועלת גיאומטרית. לכן במקרה של פונקציה בשלושה משתנים, הכלי הגיאומטרי היחיד יהיה זה שאנלוגי לקווי גובה:

הגדרה: תהי $f(x, y, z)$ פונקציה בשלושה משתנים. משטח רמה של f הוא קבוצה מהצורה $f(x, y, z) = c$ כאשר $c \in \mathbb{R}$.

אומרים "משטח רמה" ולא "משטח גובה" היות שהערך $f(x, y, z)$ כבר לא מקבל משמעות של גובה, בניגוד לערך $f(x, y)$.

דוגמאות:

1. ניקח את הפונקציה $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

משטח הרמה $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (כלומר, $c = 1$) הוא ספירה ברדיוס 1.

2. ניקח את הפונקציה $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

כדי להבין את משטח הרמה $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, ננסה להבין חתכים שלו.

נתחיל מחתכים עם ערכי z שונים: $x^2 + y^2 = 1 + z^2$. זהו בכל מקרה מעגל. עבור $z = 0$ מתקבל המעגל הקטן ביותר, ברדיוס 1. עבור $\pm z$ נקבל את אותה צורה (אבל בגבהים סימטריים מעל ומתחת למישור xy).

החתך עם $x = 0$ הוא $y^2 = 1 + z^2$. מדובר בשני קווים היפרבולים.

המשטח הזה מכונה **היפרבולואיד חד יריעתי**.

משטח הרמה $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ דומה, אבל עבור $z \pm 1$ מקבלים $x^2 + y^2 = 0$ שזו נקודה בודדת ועבור $-1 < z < 1$ לא מקבלים כל חתך.

זה מכונה **היפרבולואיד דו יריעתי**.

משטחים ריבועיים

באופן כללי: הטבלה הימנית מתייחסת למשוואה $\alpha x^2 + \beta x^2 + \gamma z^2 = \delta$ והשמאלית למשוואה $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma z$.

שם				δ	γ	β	α
אליפסואיד				+	+	+	+
היפרבולואיד חד יריעתי				+	-	+	+
היפרבולואיד דו יריעתי				-	-	+	+
חרוט דו צדדי				0	-	+	+

שם				γ	β	α
פרבולואיד אליפטי				+	+	+
פרבולואיד היפרבולי				+	-	+

1.2 הגדרת הגבול ותכונות בסיסיות, גבול על מסלול

הגדרת הגבול עבור פונקציה בשני משתנים

המושג הבסיסי לכל המשך ההתעסקות שלנו עם פונקציות מרובות משתנים הוא מושג הגבול, כמו במשתנה יחיד. מכיוון שעשינו הכנה טופולוגית ומטרית, אפשר לומר בפשטות שהגבול מוגדר ממש כמו ל- $f(x)$: אז אמרנו כי $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים כי $|f(x) - L| < \varepsilon$.

באופן אנלוגי, נאמר כי

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $0 < d((x,y), (x_0,y_0)) < \delta$ אז $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$.

הגדרה: תהי $f(x,y)$ פונקציה שמוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה (x_0,y_0) , ויהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר ש- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל (x,y) המקיימת

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

מתקיים כי $|f(x,y) - L| < \varepsilon$.

המשמעות הגיאומטרית היא שלכל נקודה בסביבה מעגלית מנוקבת מספיק קטנה של (x_0,y_0) , ערך הפונקציה מספיק קרוב ל- L .

הנה הגדרה שקולה, שלעיתים נוחה יותר.

הגדרה: תהי $f(x,y)$ פונקציה שמוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה (x_0,y_0) , ויהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר ש- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל (x,y) המקיימת

$$|x - x_0|, |y - y_0| < \delta, (x,y) \neq (x_0,y_0)$$

מתקיים כי $|f(x,y) - L| < \varepsilon$.

המשמעות הגיאומטרית היא שלכל נקודה בסביבה ריבועית מנוקבת מספיק קטנה של (x_0, y_0) , ערך הפונקציה מספיק קרוב ל- L .

סימון נוסף: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$.

הגדרת הגבול עבור פונקציה בשלושה משתנים

באותו אופן כמו עבור $f(x, y)$, נגדיר גבול של פונקציה בשלושה משתנים.

הגדרה: תהי פונקציה שמוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה (x_0, y_0, z_0) , ויהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר ש-
 $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = L$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל (x, y, z) המקיימת

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$$

מתקיים כי $|f(x, y, z) - L| < \epsilon$.

באותו אופן, אפשר גם להשתמש בקרבה בכל רכיב בנפרד:

הגדרה: תהי פונקציה שמוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה (x_0, y_0, z_0) , ויהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר ש-
 $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = L$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל (x, y, z) המקיימת

$$|x - x_0|, |y - y_0|, |z - z_0| < \delta, (x, y, z) \neq (x_0, y_0, z_0)$$

מתקיים כי $|f(x, y, z) - L| < \epsilon$.

סימון נוסף: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \\ z \rightarrow z_0}} f(x, y, z)$.

גבול אינסופי

המקרה של גבול אינסופי מוגדר באופן דומה לפונקציות במשתנה יחיד.

הגדרה:

1. תהי פונקציה שמוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה (x_0, y_0) .

נאמר כי $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \infty$ אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל (x, y) המקיימת

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

מתקיים כי $f(x, y) > M$.

עבור $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = -\infty$, כנ"ל אך עם $f(x, y) < M$.

2. תהי פונקציה שמוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה (x_0, y_0, z_0) .

נאמר כי $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = \infty$ אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל (x, y, z) המקיימת

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$$

מתקיים כי $f(x, y, z) > M$.

עבור $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = -\infty$, כנ"ל אך עם $f(x, y, z) < M$.

ניתן להגדיר כמובן באופן דומה עם סביבות ריבועיות.

גבול באינסוף

המקרה של גבול באינסוף שונה מהמקרה החד ממדי, ולעיתים מבלבל.

עבור פונקציה במשתנה יחיד $f(x)$, יש שני סוגים של גבול באינסוף: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

עבור פונקציה בשני משתנים (או יותר), יש אינסוף כיוונים אפשריים של שאיפה לאינסוף, ונראה בהמשך שיש טעם להתחשב גם בשאלה אם התנועה היא על קו ישר או לא.

ניתן להגדיר בהתאם אינסוף סוגים של שאיפה לאינסוף, אך נתמקד בעיקר דווקא בגישה פשוטה (אם כי קצת מבלבלת) יותר: שאיפה לאינסוף פירושה מכל הכיוונים באחידות.

הגדרה: תהי $f(x, y)$ פונקציה אשר מוגדרת בקבוצה מהצורה $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > R_0^2\}$ עבור $R_0 > 0$ כלשהו (חוץ של עיגול; "סביבה של אינסוף").

א. יהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר כי $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} f(x, y) = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $R > 0$ כך שלכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ המקיימת $x^2 + y^2 > R^2$ מתקיים כי $|f(x, y) - L| < \varepsilon$.

ב. נאמר כי $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} f(x, y) = \infty$ אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $R > 0$ כך שלכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ המקיימת $x^2 + y^2 > R^2$ מתקיים כי $f(x, y) > M$.

עבור $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = -\infty$, כנ"ל אך עם $f(x, y) < M$.

במילים אחרות, המשמעות של $(x, y) \rightarrow \infty$ היא שהמרחק מהראשית שואף לאינסוף.

ההגדרה עבור פונקציה בשלושה משתנים (או יותר) דומה; וניתן להשתמש בחוץ של ריבוע במקום חוץ של עיגול.

תכונות בסיסיות

כל המשפטים המוכרים על גבולות במשתנה יחיד נכונים, והוכחותיהם אנלוגיות לגמרי להוכחות עבור $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

משפט 1:

1. יחידות הגבול אם $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = L_1$ וגם $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = L_2$ אז $L_1 = L_2$.

2. מתכנסת היא חסומה אם $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ קיים אז קיים $\delta > 0$ וקיים M כך שלכל (x, y) שמקיימת

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

מתקיים כי $|f(x, y)| \leq M$.

3. תכונות סדר של גבולות

א. אם $f(x, y) \leq g(x, y)$ בסביבה מנוקבת של הנקודה (x_0, y_0) ושני הגבולות קיימים במובן הרחב, אז

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \leq \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y)$$

ב. אם שני הגבולות קיימים במובן הרחב ומתקיים כי

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) < \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y)$$

אז קיימת סביבה מנוקבת של הנקודה (x_0, y_0) שבה $f(x, y) < g(x, y)$

4. אריתמטיקה של גבולות אם $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = L_1$ וגם $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y) = L_2$ אז:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} (f(x, y) + g(x, y)) = L_1 + L_2 \quad \text{א.}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} (f(x, y) \cdot g(x, y)) = L_1 \cdot L_2 \quad \text{ב.}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{L_1}{L_2} \quad \text{ג. אם } L_2 \neq 0$$

5. גבול של ערך מוחלט אם $f(x, y)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של (x_0, y_0) ו- $L \in \mathbb{R}$, אז

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = L \iff \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} |f(x, y) - L| = 0$$

בנוסף, גם עבור $L = \pm\infty$, אם $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = L$ אז $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} |f(x, y)| = |L|$

6. גבול של חזקה אם $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = L_1$ וגם $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = L_2$ אז

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)^{g(x, y)} = L_1^{L_2}$$

בתנאי שמתקיים אחד מהתנאים הבאים לגבי L_1, L_2 :

א. שניהם ממשיים (לא $\pm\infty$) ובנוסף $L_1 > 0$

ב. עבור $L_1 = \infty$

• כאשר $L_2 > 0$, כולל האפשרות $L_2 = \infty$; במקרה זה, הכוונה היא $L_1^{L_2} = \infty$

• כאשר $L_2 < 0$, כולל האפשרות $L_2 = -\infty$; במקרה זה, הכוונה היא $L_1^{L_2} = 0$

ג. עבור $L_2 = \infty$

• כאשר $0 < L_1 < 1$; במקרה זה, הכוונה היא $L_1^{L_2} = 0$

• כאשר $L_1 > 1$, כולל האפשרות $L_1 = \infty$; במקרה זה, הכוונה היא $L_1^{L_2} = \infty$

ד. עבור $L_2 = -\infty$

• כאשר $0 < L_1 < 1$; במקרה זה, הכוונה היא $L_1^{L_2} = \infty$

• כאשר $L_1 > 1$, כולל האפשרות $L_1 = \infty$; במקרה זה, הכוונה היא $L_1^{L_2} = 0$

ה. עבור $L_1 = 0$, כאשר $f(x, y) \geq 0$ בסביבה מנוקבת של הנקודה (x_0, y_0) , ובנוסף $L_2 > 0$, כולל האפשרות $L_2 = \infty$; במקרה זה, הכוונה היא $L_1^{L_2} = 0$.

ו. עבור $L_1 = 0$, כאשר $f(x, y) > 0$ בסביבה מנוקבת של הנקודה (x_0, y_0) , ובנוסף $L_2 < 0$, כולל האפשרות $L_2 = -\infty$; במקרה זה, הכוונה היא $L_1^{L_2} = \infty$.

7. כלל הסנדוויץ' אם $f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y)$ בסביבה מנוקבת של (x_0, y_0) (ובפרט שלושתן מוגדרות בסביבה מנוקבת זו) ובנוסף

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} h(x, y)$$

(שני הגבולות קיימים ושווים) אז הגבול של g קיים גם הוא ושווה להם, כלומר

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} h(x, y)$$

8. כלל הפיצה אם $f(x, y) \leq g(x, y)$ בסביבה מנוקבת של (x_0, y_0) (ובפרט שתיהן מוגדרות בסביבה מנוקבת זו) ובנוסף $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \infty$ או $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y) = \infty$

9. חסומה כפול אפסה אם $f(x, y)$ חסומה בסביבה מנוקבת של הנקודה (x_0, y_0) ובנוסף $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y) = 0$ או $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) g(x, y) = 0$

10. קריטריון היינה (גבול בלשון סדרות): אם $f(x, y)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של (x_0, y_0) , אז

$$f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} L$$

אם ורק אם לכל סדרה $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x_0, y_0)$ מתקיים $f(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$.

כל התכונות נכונות באופן אנלוגי גם לפונקציה בשלושה משתנים (ויותר), ולגבול באינסוף.

הערה: בעזרת קריטריון היינה ניתן גם להראות שאפשר לחשב גבול של פונקציה "אלמנטרית", למשל

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} \sin(x^2 y) = \sin 2$$

משפט לגבי גבול לאורך מסלול

בהמשך להערה, כלי שימושי נוסף היה גבולות חד-צדדיים, והיותם קיימים ושווים אם ורק אם הגבול קיים. בניגוד למשפטים שבהערה, זה לא לגמרי מובן מאליו מה האנלוגיה הנכונה עבור גבול דו-ממדי. האם צריך לבדוק גבול מכל כיוון התקרבות?

דוגמה: נסתכל למשל על $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. נתקרב לראשית על כיוון כללי,

$$\begin{cases} x(t) = at, \\ y(t) = bt \end{cases}$$

נציב לפונקציה:

$$f(at, bt) = \frac{abt^2}{a^2t^2 + b^2t^2} = \frac{ab}{a^2 + b^2}$$

כלומר, הפונקציה קבועה אם מצטמצמים לכיוון מסוים, כך שהגבול באותו כיוון קיים. אבל הוא תלוי בכיוון!

למשל, התקרבות מכיוון $y = x$ יתן גבול של $\frac{1}{2}$, בעוד שהתקרבות מציר ה- x יתן גבול 0.

זה ברור שבמצב כזה, הגבול לא קיים. בקרוב ננסח משפט מדויק שמצדיק טיעון זה.

משפט 2: תהי $f(x, y)$ פונקציה שמוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה (x_0, y_0) . אם

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

אז לכל שתי פונקציות $x(t)$ ו- $y(t)$ שמקיימות

$$1. \quad x(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} x_0, \quad y(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} y_0$$

$$2. \quad (x(t), y(t)) \neq (x_0, y_0) \quad \text{בסביבה מנוקבת של } t = 0,$$

$$\text{מתקיים כי } \lim_{t \rightarrow 0} f(x(t), y(t)) = L$$

לכן בדיקה של גבול על מסלולים עוזרת לשלול קיום גבול.

הוכחה ועוד עבור גבול לאורך מסלול

דוגמה: נסתכל על $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. כאן

$$f(at, bt) = \frac{a^2 b t^3}{a^4 t^2 + b^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

כלומר, מכל כיוון התקרבות, הגבול הוא 0.

אבל מתברר שהגבול $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ לא קיים! אפשר לראות את זה מיד אם מתקרבים לא על ישר אלא על פרבולה:

$$f(x, x^2) = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

כלומר, אין התאמה בין הערך המתקבל משאיפה על ישרים או על הפרבולה $y = x^2$.

הערות:

- המשפט נכון גם עבור שלושה משתנים (ויותר).
- לא מספיק שהגבול יהיה זהה על כל מסלול ישר על מנת שאפשר יהיה להסיק כי הגבול קיים.
- אפשר לחשוב על $(x(t), y(t))$ בתור מיקום של חלקיק בזמן t . במובן הזה מדובר במסלול שעובר דרך (x_0, y_0) בזמן $t = 0$.

כלומר, אם גבול קיים בנקודה, אז כל מסלול שמתכנס לנקודה מתקבל אותו גבול.

- אפשר לחשוב על המשפט בתור הכלאה בין קריטריון היינה לבין המשפט על גבולות חד-צדדיים.
- בעצם, זהו משפט עבור גבול של הרכבה. ניתן להשתמש בכל גרסה (נכונה) של גבול של הרכבה. לא נכתוב את כולן, כי יש אפשרויות רבות.
- אין חשיבות מיוחדת ל- $t = 0$ או לקטע $[0, 1]$. העיקר שהגבול ב- t יהיה תואם לגבול ב- (x, y) .
- למעשה, המשפט הוא אם ורק אם. לא נוכיח ולא נשתמש בכיוון ההפוך.

דוגמאות בנושא גבול של הרכבה

$$1. \text{ לפי משפט, מתקיים כי } \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

מצד שני, לפי אריתמטיקה (או בעזרת הגדרת הגבול, למי שעדיין לא מרגיש בנוח):

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) = 0$$

לבסוף, לכל $(x, y) \neq (0, 0)$ מתקיים כי $x^2 + y^2 \neq 0$.

לכן לפי גבול של הרכבה,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}} = e$$

2. בניגוד לדוגמה הקודמת, הגבול

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + xy)^{\frac{1}{xy}}$$

אינו קיים. ואכן, למרות שמתקיים

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} xy = 0$$

הביטוי xy מתאפס בכל סביבה מנוקבת של הראשית $(0, 0)$.

לכן הפונקציה $(1 + xy)^{\frac{1}{xy}}$ אינה מוגדרת באף סביבה מנוקבת של הראשית, ולא מתקיים התנאי המקדים לקיום הגבול.

הערה: ניתן להגדיר **גבול ביחס לקבוצה** כדי לתת משמעות בכל זאת לגבול בדוגמה השניה. העיקרון הוא להכריז על קבוצה (למשל, $(x, y) \neq 0$) ולהתקרב לנקודה רק מתוך קבוצה זו.

זהו מושג שיכול להיות שימושי, אבל כדי לא להכביד מדי, לא נתעמק בו כעת. אנחנו נדבר לעומק על המושג המקביל ברציפות (כאשר נדבר על רציפות).

1.3 גבול נשנה וגבול בעזרת ייצוג קוטבי

גבול נשנה

דבר אחד שצריך להזהר ממנו הוא הפיתוי להשתמש בגבולות נשנים.

יש כלים כמו כלל לופיטל שפשוט לא קיימים עבור גבול דו-ממדי, ועלול לגבור הרצון על השכל ולחשוב שלמשל:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

אבל כבר ראינו שהגבול $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ לא קיים!

המשמעות של חישוב גבול נשנה הוא התקרבות לראשית בשני שלבים: קודם לשאוף לציר, ואז לראשית. לא רק שקיומם לא מחייב את קיום הגבול, הם עלולים שלא להיות קיימים כשהגבול כן קיים. לסיכום, גבולות נשנים זה רשע.

בכל זאת, יש משפט שמקשר בין גבולות נשנים לבין גבולות דו-ממדיים. נציג אותו רק כדי לא להסתיר שהוא קיים, ולא כדי להשתמש בו.

משפט 3: אם הגבול הדו-ממדי $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ קיים וכן הגבול הנשנה $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y))$ קיים, אז הם שווים.

ייצוג קוטבי

אפשר לחשוב על הדינמיקה של גבול דו-ממדי, מבחינה גיאומטרית, בתור התקרבות לראשית (למשל) מכל הכיוונים בו זמנית. ננסה להפוך את הרעיון הזה לכלי לחישוב גבולות.

המרחק של נקודה (x,y) מהראשית נתון על ידי $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. אפשר לייצג את הנקודה באמצעות קואורדינטות קוטביות (פולריות, (r, θ)) במקום קרטזיות (x,y) . ה- r הוא המרחק מהראשית כנ"ל, והזווית θ היא הזווית בין ישר שמחבר את (x,y) לראשית, לבין ציר ה- x החיובי.

באופן הזה, לא קשה לבדוק שמתקיים

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

יש להיזהר לגבי הנוסחה $\tan \theta = \frac{y}{x}$, כי זה לא נכון תמיד שמתקיים $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. זה תלוי ברביע. בנוסף, על ציר y , הזווית היא $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ אבל הנוסחה כמובן לא עובדת כי $x = 0$.

הזוג (r, θ) נקרא **הקואורדינטות הקוטביות** של הנקודה (x,y) , והקשר בין הרכיבים כתוב למעלה.

בהינתן פונקציה $f(x,y)$, הביטוי $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ נקרא **ייצוג קוטבי** של $f(x,y)$.

דוגמאות:

1. הפונקציה $f(x,y) = x^2 + y^2$ בייצוג קוטבי היא

$$(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = r^2$$

2. הפונקציה $f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ בייצוג קוטבי היא

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta$$

אפשר לראות מהייצוג הזה שכאשר $r \rightarrow 0$, הפונקציה שואפת לאפס.

צריך להזהר מעט: זה לא מספיק שהביטוי שואף לאפס כאשר $r \searrow 0$, לכל θ בנפרד. מיד נציג משפט שמאפשר לחשב גבולות באופן הזה.

גבול בייצוג קוטבי

משפט 4: תהי $f(x, y)$ מוגדרת בסביבת מנוקבת של $(0, 0)$. נניח שקיימות פונקציה $F(r)$ ו- $G(\theta)$ כך שמתקיים:

1. לכל r בסביבה מנוקבת ימנית של $r = 0$, ולכל θ :

$$|f(r \cos \theta, r \sin \theta)| \leq F(r) G(\theta)$$

2. $G(\theta)$ פונקציה חסומה. כלומר, קיים $M > 0$ כך שלכל $\theta \in \mathbb{R}$ מתקיים $|G(\theta)| \leq M$.

$$3. F(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0+} 0$$

אז $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$

דוגמה: ראינו שעבור הפונקציה $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$,

$$|f(r \cos \theta, r \sin \theta)| = r^2 |\cos^2 \theta \sin^2 \theta|$$

זה ברור ש- $r^2 \xrightarrow{r \rightarrow 0+} 0$ ו- $|\cos^2 \theta \sin^2 \theta| \leq 1$ ולכן

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0$$

הכללה של גבול בייצוג קוטבי

הערות:

- אפשר לשפר את המשפט כך שישמש בנקודה כללית ולגבול שאינו בהכרח $L = 0$:

$$|f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) - L| \leq F(r) G(\theta)$$

ואז כמו קודם. ההוכחה זהה.

כמובן שזה מצריך ניחוש מראש של ערך הגבול L .

- אם קיים θ כך שלא מתקיים $\lim_{r \rightarrow 0+} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = L$ אז זה למעשה מסלול ישר בזווית θ שעליו לא מתקיים כי הגבול L .
- אם $\lim_{r \rightarrow 0+} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ קיים לכל θ ולא תלוי ב- θ , עדיין יתכן שהגבול לא קיים. זה בעצם אומר שהגבול זהה על כל מסלול ישר, ועל זה כבר דיברנו.
- אמרנו שהדינמיקה של שאיפה לראשית היא התקרבות מכל הכיוונים בו זמנית. במובן הזה, המשפט לא בדיוק תופס את האינטואיציה. ובאמת, אפשר לחזק אותו: $L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ אם ורק אם

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = L$$

במידה שווה ב- θ .

לכל $\epsilon > 0$ קיים R כך שלכל $0 \leq r < R$ ולכל θ מתקיים $|f(r \cos \theta, r \sin \theta) - L| < \epsilon$.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. רציפות בנקודה ובקטע סגור של פונקציה $f(x)$.
2. תכונות בסיסיות של פונקציות רציפות (אריתמטיקה, רציפות בלשון סדרות, הרכבה של רציפות היא רציפה) מחדו"א ב'.
3. משפטי יסוד של פונקציות רציפות בקטע סגור וחסום (משפטי וירשטראס, משפט ערך הביניים).
4. הגדרת הנגזרת בחדו"א ב'.
5. ישר משיק לגרף של פונקציה גזירה בנקודה.

“ I learned very early the difference between knowing the name of something and knowing something.

”

Richard P. Feynman