

הרצאה 6: טופולוגיה

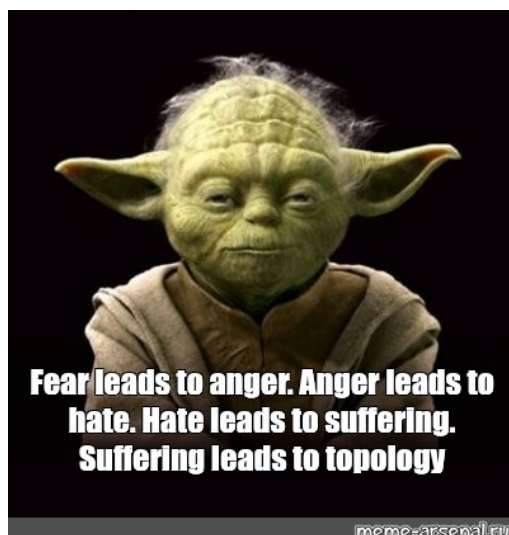
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1	טופולוגיה
2	1.1	עיגולים, קבוצות פתוחות
4	1.2	קבוצות סגורות וקבוצות קשירות
6	1.3	סדרות



1 | טופולוגיה

1.1 עיגולים, קבוצות פתוחות

עיגולים

מושג הסביבה הוא מהותי וחשוב להבנה של מבנה המרחב ותכונותיו. ב- $\mathbb{R}$ סביבה פשוטה הייתה קטע פתוח, והרדיוס שלה היה מדד לכמה היא גדולה או קטנה.

ב- $\mathbb{R}^2$ יש אנלוג תמים לקטע פתוח: עיגול.

הנה ספילר של מושגים מרכזיים שנכיר, עם השוואה למקרה החד ממדי:

ב- $\mathbb{R}$	ב- $\mathbb{R}^n$
ε -סביבה	כדור פתוח ברדיוס ε
קטע פתוח	תחום (קבוצה פתוחה וקשירה)
קטע סגור	סגור של תחום (תחום יחד עם השפה שלו)

הגדרה:

1. עיגול פתוח ברדיוס $r > 0$ סביב $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ הוא קבוצת הנקודות

$$B((x_0, y_0), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), (x_0, y_0)) < r\}$$

2. כדור פתוח ברדיוס $r > 0$ סביב $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ הוא קבוצת הנקודות

$$B((x_0, y_0, z_0), r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid d((x, y, z), (x_0, y_0, z_0)) < r\}$$

3. כדור פתוח ברדיוס $r > 0$ סביב $x \in \mathbb{R}^n$ הוא קבוצת הנקודות

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r\}$$

הערה: יש גישות אפשריות אחרות. למשל, ריבוע (או תיבה), ואפילו מעוין.

אנלוג תמים לקטע סגור הוא עיגול סגור, שלפעמים מסומן

$$B[x, r] = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) \leq r\}$$

דוגמאות:

1. ב- $\mathbb{R}^2$, $B((0, 0), 1)$ מכונה עיגול היחידה.

2. ב- $\mathbb{R}^3$, $B((0, 0, 0), 1)$ מכונה כדור היחידה.

קבוצות פתוחות

המושג **טופולוגיה** מתייחס ללמידה של **קבוצות פתוחות**, ושל מושגים שנגזרים מקבוצות פתוחות. השם הוצע לראשונה על ידי תלמיד של גאוס בשם ליסטינג (Johann Benedict Listing, 1808 – 1882).

הגדרה: תהי $U \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה.

1. נקודה $x \in U$ מכונה **נקודה פנימית** של U אם קיים $\delta > 0$ כך ש- $B(x, \delta) \subset U$.

במקרה כזה גם אומרים ש- U היא **סביבה** של x .

2. נאמר ש- U **קבוצה פתוחה** אם כל הנקודות ב- U הן נקודות פנימיות של U (היא סביבה של כל הנקודות שלה).

3. קבוצת כל הנקודות הפנימיות של U מכונה **הפנים** של U ומסומנת $\text{int}(U)$.

המושג **נקודה פנימית** הוצע על ידי המתמטיקאים קנטור ופיאנו. המושג **קבוצה פתוחה** הוצע על ידי לבג.

דוגמאות:

1. ב- $\mathbb{R}$, $(0,1)$ היא סביבה של $\frac{1}{2}$ אבל לא של 0. הקטע $[0,1)$ גם אינו סביבה של 1, אבל 1 במילא לא שייך אליו ולכן זה פחות מרגש.

מנגד, $(0,1)$ סביבה של כל המספרים בתוכו. כלומר, הוא קבוצה פתוחה.

2. כל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה. אחרת, הכינוי "פתוח" היה מאוד לא מוצלח. מיד נוכיח.

שפה של קבוצה

הגדרה: תהי $U \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה. נאמר כי $y_0 \in \mathbb{R}^n$ היא **נקודת שפה** של U אם לכל $r > 0$ מתקיים שהכדור $B(y_0, r)$ מכיל גם נקודות מתוך U וגם נקודות מחוץ ל- U .

הערה: נקודת שפה y_0 לא חייבת להיות שייכת לקבוצה U .

הגדרה: קבוצת כל נקודות השפה של U מסומנת ∂U . היא מכונה **השפה** של U .

הערה: מתקיים כי $\partial(U^c) = \partial U$ (הסבירו!).

משפט 1:

1. כל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה.

2. קבוצה היא פתוחה אם ורק אם היא לא מכילה אף אחת מנקודות השפה שלה: $\partial U \cap U = \emptyset$.

1.2 קבוצות סגורות וקבוצות קשירות

קבוצות סגורות

קבוצה פתוחה מכלילה "קטע פתוח", שהוא קטע שלא מכיל אף נקודת קצה ("שפה").
קבוצה סגורה שנגדיר כעת מכלילה "קטע סגור", שהוא קטע שמכיל את כל קצותיו.
למעשה, אמירה זו לא מדויקת כי חסרה תכונה נוספת עליה נדבר בהמשך כדי להכליל באמת קטע. אבל
בינתיים, זה נותן מעט אינטואיציה.

הגדרה: קבוצה $A \subset \mathbb{R}^n$ נקראת סגורה אם היא מכילה את כל נקודות השפה שלה: $\partial A \subset A$.

הערה: "רוב" הקבוצות הן לא פתוחות ולא סגורות. כלומר, סגורה זה לא ההיפך של פתוחה.
נעיר בנוסף שהקבוצות היחידות אשר מקיימות: גם פתוחה וגם סגורה, הן $\mathbb{R}^n, \emptyset$.

דוגמאות:

1. עיגול היחידה הפתוח $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ אינו קבוצה סגורה.
כנ"ל לכל עיגול פתוח, וגם לכל כדור פתוח ב- $\mathbb{R}^n$.
2. עיגול היחידה הסגור $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ הוא קבוצה סגורה.
כנ"ל לכל עיגול סגור, וגם לכל כדור סגור ב- $\mathbb{R}^n$.
3. הקבוצה $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\}$ היא קבוצה סגורה.
4. קבוצה אשר מורכבת משתי חתיכות נפרדות, כל אחת קבוצה פתוחה, היא
קבוצה פתוחה אבל שלא נראית כמו הכללה של קטע. הסיבה: אי אפשר
להגיע מכל נקודה בקבוצה לכל נקודה אחרת.
- נראה בהמשך שקבוצה כזו היא לא קשירה מסילתית, וזו התכונה החסרה
לקבוצה פתוחה על מנת שתהווה הכללה טובה לקטע פתוח.
5. הקבוצה המוזרה

$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$$

היא לא פתוחה ולא סגורה.

השפה של A היא כל $\mathbb{R}^2$.

סגור של קבוצה

הגדרה: תהי $A \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה. הסגור של A הוא הקבוצה $\bar{A} = A \cup \partial A$.

משפט 2: תהי $A \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה. הסגור של A היא קבוצה סגורה אשר מכילה את A , וכל קבוצה סגורה אשר מכילה את A מכילה גם את $\bar{A}$.

כלומר, $\bar{A}$ היא "הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר אשר מכילה את A ".

דוגמאות:

1. עבור $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ נקבל

$$\bar{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

2. הקבוצה $A = \{(1, 0)\}$ סגורה (ולכן היא שווה לסגור של עצמה) אבל אין אף קבוצה פתוחה U עבורה $\bar{U} = A$.

קבוצות חסומות

הגדרה: קבוצה $A \subset \mathbb{R}^n$ נקראת חסומה אם יש כדור שמכיל אותה.

לא קשה להיווכח שאם יש כזה כדור, אז יש גם כדור סביב הראשית שמתאים. כלומר, A חסומה אם ורק אם קיים $R > 0$ עבורו לכל $x \in A$ מתקיים $|x| \leq R$.

דוגמאות:

1. כל עיגול / כדור מהווה קבוצה חסומה, לפי ההגדרה.

2. כל מלבן (תיבה) הוא קבוצה חסומה.

3. רביע ב- $\mathbb{R}^2$ אינו קבוצה חסומה.

הגדרה של קבוצה קשירה מסילתית

הוזכר בעבר שעיגול פתוח הוא אנלוג תמים לקטע פתוח. נכיר כעת במדויק אנלוג מתאים יותר.

הגדרה: תהי $A \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה. נאמר ש- A קשירה מסילתית אם בין כל שתי נקודות ב- A קיים עקום רציף שמוכל ב- A . כלומר, לכל $x, y \in A$ קיים עקום רציף $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ כך ש:

$$1. \gamma(0) = x \text{ וכן } \gamma(1) = y.$$

$$2. \text{ לכל } t, 0 \leq t \leq 1, \gamma(t) \in A.$$

$$3. \text{ נציג } \gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)). \text{ אז הפונקציות } x_1(t), \dots, x_n(t) \text{ רציפות בקטע } [0, 1].$$

קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית מכונה תחום.

הערה: אין שום חשיבות לקטע $[0, 1]$, ואפשר להשתמש בכל קטע סגור וחסום אחר.

דוגמאות:

1. דוגמה לעקום רציף:

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

בציור, מתקבל מעגל היחידה.

2. תחום ההגדרה של $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ הוא $x, y \neq 0$.

זו קבוצה פתוחה אבל לא קשירה מסילתית ולכן לא תחום.

תחומי ההגדרה של פונקציות יהיו תחומים. באופן טבעי נצטרך לפעמים להתעסק גם עם סגור של תחום. לקבוצה כזו נקרא **תחום סגור**.

דוגמה: עיגול היחידה הסגור הוא תחום סגור, כי הוא הסגור של עיגול היחידה הפתוח שהוא תחום. מנגד, הישר $y = x$ אינו תחום סגור כי הוא לא מתקבל כסגור של אף תחום.

1.3 סדרות

התכנסות של סדרה והקשר להתכנסות רכיביה

חלק מהמושגים הטופולוגיים שראינו ניתנים לפיענוח והבנה באמצעות התכנסות של סדרות.

דוגמאות:

1. סדרת הנקודות $P_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ נמצאת כולה על הישר $y = x$. אינטואיטיבית, היא מתכנסת לראשית $(0, 0)$.

2. סדרת הנקודות $P_n = (\cos n, \sin n)$ נמצאת כולה על מעגל היחידה, אך אינה מתכנסת לאף גבול.

הגדרה: תהי $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ סדרה של נקודות ב- $\mathbb{R}^n$. נאמר שהסדרה מתכנסת לגבול $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ ונסמן $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^{(0)}$ אם

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x^{(k)}, x^{(0)}) = 0$$

כלומר, לכל $\epsilon > 0$ קיים N כך שלכל $k > N$ מתקיים $d(x^{(k)}, x^{(0)}) < \epsilon$.

משפט 3: תהי $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ סדרה ב- $\mathbb{R}^n$ ותהי $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. אז $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^{(0)}$ אם ורק אם לכל $i = 1, \dots, n$ מתקיים $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i^{(0)}$.

בזכות המשפט מקבלים מיד כללים רבים לחישוב גבולות ב- $\mathbb{R}^n$, כמו למשל אריתמטיקה של גבולות (כי הם נכונים בכל רכיב).

משפט בולצאנו וירשטראס

הגדרה: תהי $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ סדרה של נקודות ב- $\mathbb{R}^n$.

נאמר שהסדרה חסומה אם קיים M כך ש- $d(x^{(k)}, 0) \leq M$ לכל k .

למשל, (x_n, y_n) חסומה אם קיים M כך שלכל n מתקיים $\sqrt{x_n^2 + y_n^2} \leq M$.

משפט 4: לכל סדרה חסומה ב- $\mathbb{R}^n$ יש תת-סדרה מתכנסת.

כלומר, אם קיים M כך ש- $d(x^{(k)}, 0) \leq M$ לכל k , אז קיימת תת-סדרה $(x^{(k_j)})_{j=1}^\infty$ מתכנסת.

סדרות בטופולוגיה

הנה כמה ניסוחים סדרתיים של מושגים טופולוגיים:

משפט 5: תהי $A \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה.

1. הסגור $\bar{A}$ של A הוא בדיוק קבוצת כל נקודות הגבול של A : $x \in \mathbb{R}^n$ היא נקודת גבול של A אם יש סדרה מתוך A שמתכנסת ל- x .

2. A קבוצה סגורה אם ורק אם לכל סדרה מתכנסת שמוכלת ב- A מתקיים שהגבול שלה גם שייך ל- A .

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. גרף של פונקציה $y = f(x)$.
2. הגדרת הגבול $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ מחדו"א ב'1.
3. גבולות חד צדדיים.
4. תכונות של גבול של פונקציה (יחידות, חסימות, תכונות סדר, אריתמטיקה, כלל הסנדוויץ', קריטריון היינה).

“ A mathematician who is not also something of a poet will never be a complete mathematician. ”

Karl Weierstrass