

הרצאה 5: מרחקים, ישרים ומישורים

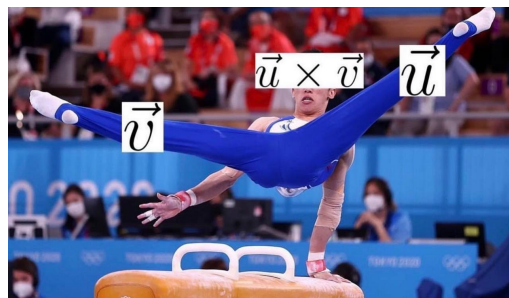
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

3	1 מרחק, נורמה, מכפלה סקלרית, מכפלה וקטורית
3	1.1 מרחק, נורמה ומכפלה פנימית
4	1.2 תיאור גיאומטרי של מכפלה סקלרית
6	1.3 מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת
9	2 ישרים ומישורים
9	2.1 ייצוגים של קווים ישרים
11	2.2 קשרים בין ישרים ונקודות
14	2.3 ייצוגים של מישורים
16	2.4 קשרים בין מישורים, ישרים ונקודות



תזכורות

הגדרה: המכפלה הסקלרית בין שני וקטורים $x, y \in \mathbb{R}^n$ מוגדרת על ידי

$$x \cdot y \equiv \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

משפט 1: התכונות היסודיות עבור המכפלה הסקלרית:

1. חיוביות בהחלט לכל $x \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $\langle x, x \rangle \geq 0$, ויש שוויון אם ורק אם $x = 0$.

2. סימטריות לכל $x, y \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

3. לינאריות ברכיב הראשון לכל $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ וסקלר $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

הגדרה: הנורמה האוקלידית של וקטור $x \in \mathbb{R}^n$ מוגדרת על ידי

$$|x| \equiv \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

למשל, במקרה $n = 2$ נקבל את הביטוי $\sqrt{x^2 + y^2}$. במקרה $n = 3$ נקבל את הביטוי $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

משפט 2: לכל $x, y \in \mathbb{R}^n$ מתקיים אי-שוויון קושי-שוורץ:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

בנוסף, יש שוויון אם ורק אם x, y מקבילים.

משפט 3: התכונות היסודיות של הנורמה הן:

1. חיוביות בהחלט לכל $x \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $\|x\| \geq 0$, ויש שוויון אם ורק אם $x = 0$.

2. הומוגניות לכל $x \in \mathbb{R}^n$ וסקלר $\alpha \in \mathbb{R}$, $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

3. אי-שוויון המשולש $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ לכל $x, y \in \mathbb{R}^n$.

1 | מרחק, נורמה, מכפלה סקלרית, מכפלה וקטורית

1.1 מרחק, נורמה ומכפלה פנימית

מבוא לפונקציות במספר משתנים

בחדו"א 1 עסקנו בעיקר בכל מיני נושאים שקשורים בפונקציות של משתנה יחיד, $f(x)$. מעתה והלאה נעסוק בפונקציות של שני משתנים $f(x, y)$, או של שלושה משתנים $f(x, y, z)$, ואפילו לפעמים של מספר כללי n של משתנים $f(x_1, \dots, x_n)$.

לא חסרה מוטיבציה לחקור ולהבין כאלה פונקציות. אפשר אולי לומר שיש יותר מוטיבציה לחקור אותן מאשר פונקציות של משתנה יחיד. איזה מין גודל פסיקלי תלוי רק במשתנה אחד? אם נגזים קצת, נוכל אף לומר שלמידת פונקציות במשתנה יחיד היה בגדר "אימון" לקראת הדבר האמיתי: פונקציות במשתנים אחדים.

יש דרך אחרת לחשוב על פונקציה של שני משתנים $f(x, y)$: לכל נקודה (x, y) במישור $\mathbb{R}^2$, מתאים ערך $z = f(x, y)$. כלומר, אפשר לחשוב על $f(x, y)$ בתור פונקציה $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ואכן כך נעשה.

תחום ההגדרה של פונקציה $f(x)$ בחדו"א 1 היה כמעט תמיד קטע. מהם תחומי הגדרה סבירים של פונקציות $f(x, y)$ או $f(x, y, z)$? קטע כבר פחות מתאים, למשל כי לאף נקודה אין סביבה מלאה שבה הפונקציה מוגדרת.

תשובה כללית היא, איזשהו שטח או נפח.

כדי לחקור פונקציות כאלה באופן עמוק, נצטרך להבין היטב ראשית את המישור $\mathbb{R}^2$ ובאופן כללי יותר את המרחב ה- n -ממדי:

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

זו המטרה של הפרק הנוכחי.

הערה חשובה לפני שנתחיל: אחד הכלים החשובים ביותר בלמידה של פונקציות $f(x)$ היה הגרף, $y = f(x)$. הגרף של פונקציה במשתנה יחיד הוא קבוצה חד-ממדית במישור. באופן דומה, הגרף של פונקציה בשני משתנים $f(x, y)$ הוא קבוצה דו-ממדית במרחב: $z = f(x, y)$. הגרף של פונקציה בשלושה משתנים הוא קבוצה תלת-ממדית שחיה בתוך מרחב ארבע-ממדי, $w = f(x, y, z)$. לכן יש פה קפיצה של קושי וקל יותר להבין פונקציות של שני משתנים, שאפשר לצייר את הגרפים שלהם.

מעכשיו לא להתבלבל - כשמציירים את מישור xy וכל מיני קווים או קבוצות בתוכו, יש לחשוב על זה בתור "מישור המשתנים" ולא לדמיין שם בשום אופן את הגרף של הפונקציה או את ערכי הפונקציה.

אותה הערה עבור $f(x, y, z)$ והמרחב התלת ממדי $\mathbb{R}^3$.

מטריקה

אחד הדברים הבסיסיים ביותר שהייתם זקוקים לו כשלמדתם על המספרים הממשיים היה המרחק בין שני מספרים, $d(x_1, x_2) = |x_2 - x_1|$. בעזרתו הוגדרו סביבות, התכנסות של סדרה ושל פונקציה ועוד.

גם ב- $\mathbb{R}^2$ יש מושג טבעי של מרחק (חשבו על משפט פיתגורס), שניתן בקלות להכללה ל- $\mathbb{R}^n$:

הגדרה: המרחק בין שתי נקודות $x, y \in \mathbb{R}^n$ מוגד על ידי

$$d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

זה מכונה המרחק האוקלידי.

יש שתי דרכים לחשוב על $(x_1, \dots, x_n)$. אחת מהן היא הנקודה במרחב $\mathbb{R}^n$ שהקואורדינטות שלה הן $x_1, \dots, x_n$. השנייה היא הוקטור אשר מחבר את הראשית אל הנקודה הזו (או כל הזזה שלו, כי הזזה של וקטור אינה משנה את זהות הוקטור).

הקשר בין נורמה לבין מרחק הוא פשוט מאוד אבל שימושי: $d(x, y) = \|y - x\|$

$$\text{בפרט, } d(x, y) = \sqrt{\langle y - x, y - x \rangle}$$

משפט 4: מתקיימות שלוש תכונות יסודיות:

1. חיוביות בהחלט לכל $x, y \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $d(x, y) \geq 0$, ויש שוויון אם ורק אם $x = y$.

2. סימטריות $d(y, x) = d(x, y)$

3. אי-שוויון המשולש $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ לכל $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

שתי התכונות הראשונות ברורות. אי-שוויון המשולש קצת יותר מורכב, אם כי מבחינה גיאומטרית הוא מבטא את הרעיון הפשוט שהדרך הקצרה ביותר בין שתי נקודות היא קו ישר.

אי-שוויון המשולש לנורמה גורר מיידית את אי-שוויון המשולש למרחק, כי:

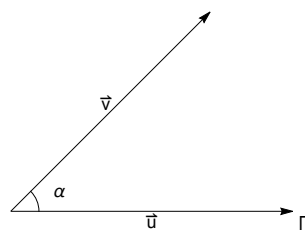
$$d(x, y) = \|y - x\| = \|(y - z) + (z - x)\| \leq \|y - z\| + \|z - x\| = d(y, z) + d(x, z)$$

יש דרכים אחרות להגדיר מרחק, שמסתדרות עם הדרישות היסודיות הללו.

1.2 תיאור גיאומטרי של מכפלה סקלרית

תיאור גיאומטרי של מכפלה סקלרית

נתונים שני וקטורים $\vec{u}, \vec{v}$. המכפלה הסקלרית $\vec{u} \cdot \vec{v}$ היא הסקלר



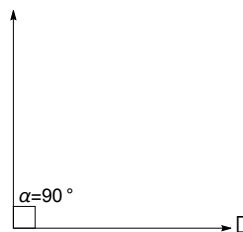
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha \quad (1)$$

α - הזווית מ- $\vec{u}$ ל- $\vec{v}$ נגד כיוון השעון.

זהו סקלר שמכמת את מידת החפיפה בין $\vec{u}$ ל- $\vec{v}$ תוך התחשבות בגדלים שלהם.

מקרים מיוחדים:

- אם $\vec{u}, \vec{v}$ הם וקטורי יחידה: $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$, אז -
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ אם $\vec{u} \perp \vec{v}$ (ניצבים).



(או $\alpha = -90^\circ$)

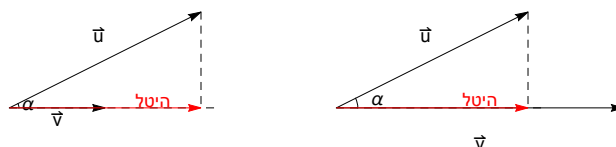
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ אם $\vec{u} = \vec{v}$ (כי $\alpha = 0$).

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$ אם $\vec{u} = -\vec{v}$ (כי $\alpha = \pi$).

- אם $\vec{u}, \vec{v}$ אינם וקטורי יחידה, אז יש מצבי קצה דומים תוך התחשבות בגדלים.
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$ (מאוד שימושי!).

היטל של וקטור נתון בכיוון ווקטור אחר

אם רק $\vec{v}$ וקטור יחידה, $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cos \alpha$ הוא אורך ההיטל של $\vec{u}$ על $\vec{v}$ (כולל סימן); ראו איור 1. ההיטל



איור 1: הוקטור $\vec{v}$ מצויר אופקי בתור ייחוס. בשרטוט השמאלי $\vec{v}$ הוא וקטור יחידה, בעוד שבימני הוא לא. ההיטל לא מושפע מזה.

הוא וקטור באורך הנ"ל שכיוונו כשל $\vec{v}$, כלומר: $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{v}$.

אם $\vec{v}$ אינו וקטור יחידה, אז $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ הוא כן וקטור יחידה (שהוא בעצם הכיוון של $\vec{v}$) ולכן:

$$P_{\vec{v}}(\vec{u}) = (\vec{u} \cdot \hat{v}) \hat{v} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right) \vec{v} \quad (2)$$

הערה: כל ציורי הוקטורים עד כה היו בדו-מימד. זה לא אומר שהם מוגבלים ל- $\mathbb{R}^2$: כל שני וקטורים תמיד ניתנים לציור בתוך מישור, שאפשר לבחור אותו בתור מישור הציור. גם צירופים לינאריים של שני וקטורים (כמו סכום הוקטורים) שייכים לאותו מישור.

דוגמה: נניח שנתונים $\vec{u} = (1, 2, 0)$ ו $\vec{v} = (1, 2, 3)$.

ההיטל של $\vec{u}$ על $\vec{v}$ הוא

$$P_{\vec{v}}(\vec{u}) = (\vec{u} \cdot \hat{v}) \hat{v} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right) \vec{v} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3}{1^2 + 2^2 + 3^2} (1, 2, 3) = \left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7} \right)$$

1.3 מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

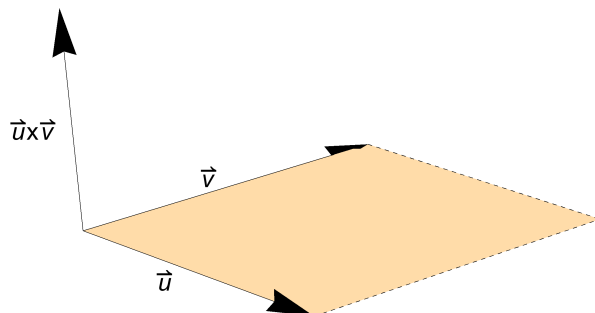
הגדרה של מכפלה וקטורית

נתונים שני וקטורים $\vec{u}, \vec{v}$. המכפלה הוקטורית שלהם $\vec{u} \times \vec{v}$ היא וקטור שכיוונו ניצב ל- $\vec{u}$ ו- $\vec{v}$ כך ש-

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$$

שלשה ימנית (במילים אחרות, אפשר למצוא את הכיוון בעזרת כלל יד ימין) וגודלו שווה ל-

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| |\sin \alpha| \quad (3)$$

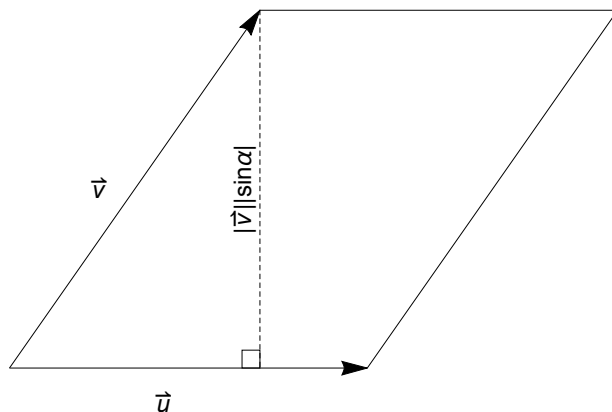


איור 2: המכפלה הוקטורית והמקבילית שנוצרת מ- $\vec{u}$ ו- $\vec{v}$.

הערה: במקבילית ששני הוקטורים יוצרים במישור משותף שלהם (ראו איור 3), $|\vec{v}| |\sin \alpha|$ הוא אורך הגובה לצלע $\vec{u}$. לכן לפי הנוסחה לשטח מקבילית,

$$\text{שטח המקבילית שנוצרת מ-}\vec{u}\text{ ו-}\vec{v} = |\vec{u} \times \vec{v}| \quad (4)$$

זה היה תיאור גיאומטרי. המשפט הבא הוא התיאור בייצוג קרטזי:



איור 3: שטח המקבילית הנוצרת.

משפט 5: לכל $\vec{u}, \vec{v}$ מתקיים:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \quad (5)$$

קשה לזכור את נוסחה (5) כמו שהיא, אבל יש טריק כדי לשחזר אותה מהר בעזרת דטרמיננט של "מטריצה":

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (6)$$

(זו לא באמת מטריצה כי יש וקטורים בשורה הראשונה).

תכונות של מכפלה וקטורית

תכונות:

1. לינאריות בכל רכיב: לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ו- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ מתקיים כי

$$\begin{cases} (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \times \vec{w} = \alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) + \beta \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \\ \vec{u} \times (\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) + \beta \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) \end{cases}$$

2. $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ אם ורק אם $\vec{u} \parallel \vec{v}$ (מקבילים).

זה נובע מכך שהגודל של המכפלה הוקטורית מתאפס אם $\vec{u} = \vec{0}$, $\vec{v} = \vec{0}$ או $\sin \alpha = 0$. בשני המקרים הראשונים, וקטור האפס מקביל לכל וקטור. במקרה השני, $\alpha = 0, \pi$ ולכן הוקטורים מקבילים.

3. המכפלות הוקטוריות בין וקטורי הכיוון של הצירים הן:

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

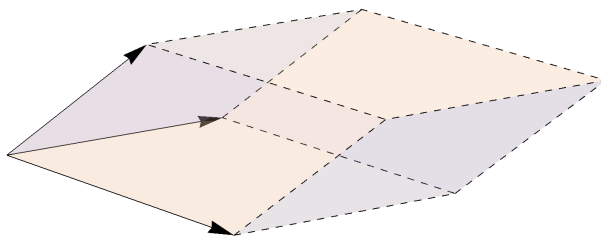
מצד שני, $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k} \neq \hat{k}$, כלומר, המכפלה הוקטורית אינה קומוטטיבית.

4. $\vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v}$. זה נקרא אנטי-קומוטטיביות.

הערה: המכפלה הוקטורית אינה אסוציאטיבית. למשל, $(\hat{i} \times \hat{j}) \times \hat{k} = \hat{j} \neq \vec{0} = (\hat{i} \times \hat{k}) \times \hat{j}$. לכן אין משמעות לסימון $\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{w}$ (יש לציין בעזרת סוגריים איזו מכפלה מבצעים קודם).

המכפלה המעורבת

האנלוג התלת-ממדי של מקבילית הוא **מקבילון**. שלושה וקטורים $\vec{u}, \vec{v}$ ו- $\vec{w}$ במרחב יוצרים מקבילון; ראו איור 4. הוקטור $\vec{u} \times \vec{v}$ מאונך למישור שנוצר מ- $\vec{u}, \vec{v}$ ולכן הגובה למישור הזה במקבילון הוא $\vec{w} \cdot \left(\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \right)$.



איור 4: מקבילון.

מצד שני, שטח המקבילית בבסיס הוא $|\vec{u} \times \vec{v}|$. לכן נפח המקבילון הוא

$$\pm V = \vec{w} \cdot \left(\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \right) |\vec{u} \times \vec{v}| = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

המספר $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ (ששווה כאמור לנפח המקבילון) נקרא **המכפלה המעורבת** של הוקטורים $\vec{u}, \vec{v}$ ו- $\vec{w}$.

משפט 6: לכל $\vec{u}, \vec{v}$ ו- $\vec{w}$,

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

בפרט, $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$ אם הוקטורים תלויים לינארית, כלומר, קו-פלנאריים (מוכלים באותו מישור).

בזכות ייצוג בתור דטרמיננט נקבל מיד מתכונות הדטרמיננט של מכפלה המעורבת יש **אופי ציקלי:**

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{w} \times \vec{u}) \cdot \vec{v} = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}$$

2 | ישרים ומישורים

2.1 ייצוגים של קווים ישרים

ייצוג פרמטרי של ישר

הדרך המוכרת לייצג ישר ב- $\mathbb{R}^2$ היא על ידי משוואה פשוטה: $y = ax + b$, או באופן כללי יותר (כדי לכלול גם ישרים אנכיים כמו $x = 4$):

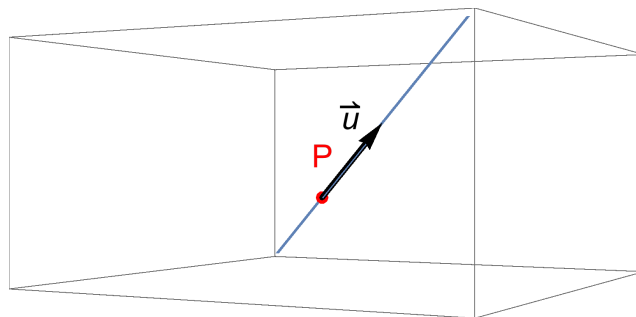
$$ax + by + c = 0, \quad a, b \text{ לא שניהם אפס}$$

זה מתאים לכלל האצבע: כל משוואה מורידה מימד (זהירות! זה רק כלל אצבע). כלומר, קבוצת הנקודות (x, y) במישור הדו-ממדי $\mathbb{R}^2$ שמקיימות את המשוואה $ax + by + c = 0$ היא גוף חד-ממדי.

לפי אותו כלל, משוואה אנלוגית במרחב התלת ממדי: $ax + by + cz + d = 0$ מתארת גוף דו-ממדי (פרטים בהמשך). לכן זה לא יתאים לתיאור ישר. לפי כלל אצבע זה, נזדקק לשתי משוואות כדי לתאר ישר. זה יהיה הייצוג הקנוני עליו נדבר בקרוב.

ישנם שני תיאורים עיקריים של ישר: יצוג קנוני כאמור, ויצוג פרמטרי. נתחיל מיצוג פרמטרי.

ישר מאופיין על ידי נקודה שעליו $P(x_0, y_0, z_0)$ ווקטור כיוון $\vec{u} = (a, b, c)$; ראו איור 5.



איור 5: ישר במרחב.

נקודה $Q(x, y, z)$ נמצאת על הישר אם מתקיים $\vec{PQ} \parallel \vec{u}$, כלומר, קיים $t \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$\vec{PQ} = t\vec{u}$$

כלומר:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

זה אומר שיש שוויון בכל רכיב, ונקבל את הייצוג הפרמטרי של הישר:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (7)$$

כלומר: הנקודות על הישר הן הנקודות $Q(x, y, z)$ שמתקבלות בצורה (7).

הערות:

- הערך המשתנה t נקרא **פרמטר**. הוא מזווג חח"ע ועל עם נקודות על הישר.
- אם למשל $a = 0$, אז $x = x_0$ על כל הישר.
- אם ידועות שתי נקודות P, Q על הישר, אפשר לבחור $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$.
- יש ייצוגים פרמטרים שונים לאותו ישר נתון. למשל, הנה שני ייצוגים של אותו ישר:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 \\ z = -4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{ו-} \quad \begin{cases} x = 2 + 2s \\ y = -3 \\ z = -4 - 8s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

- כאשר מתעסקים במספר ישרים (או אפילו במספר ייצוגים של אותו ישר), כדאי לתת שם שונה לפרמטר של כל ייצוג.

ייצוג קנוני של ישר

נתחיל מהייצוג הפרמטרי (7), ונניח תחילה ש- $a, b, c \neq 0$. נחלץ את t מכל שורה ונשווה בין הביטויים שהתקבלו:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (8)$$

זה נקרא **הייצוג הקנוני** של הישר.

הערות:

- ברוב המקרים, הייצוג הפרמטרי יותר נוח. בכל אופן, קל לעבור ביניהם.
- בייצוג הקנוני, יש להקפיד שהמקדמים של המשתנים במונה יהיו 1. אחרת, אי אפשר להסיק שהמכנים הם רכיבי וקטור כיוון של הישר וכו'. למשל,

$$\frac{2x - 1}{3} = \frac{y + 5}{4} = \frac{z}{6}$$

מייצג ישר, אבל $(3, 4, 6)$ אינו וקטור כיוון מתאים. מצאו אחד מתאים כתרגיל.

- אם למשל $a = 0$, אז מחלצים את t רק משתי השורות האחרונות ומקבלים:

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

באופן דומה, אם למשל $a = b = 0$, אז מקבלים את הייצוג הקנוני

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z \in \mathbb{R}$$

(אין הגבלה על z).

הייצוגים הפרמטרי והקנוני תקפים גם בדו-מימד (במישור). פשוט משמיטים את הרכיב השלישי.

מעבר בין יצוג פרמטרי וקנוני

דוגמאות:

1. נניח שנתון הקו הישר

$$\frac{x}{3} = y - 2 = \frac{z + 1}{4}$$

זהו יצוג קנוני של ישר אשר עובר בנקודה $(0, 2, -1)$ ובכל וקטור כיוון $\vec{u} = (3, 1, 4)$.

לכן יש לו יצוג פרמטרי

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$$

2. נניח שנתון הקו הישר

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 - t \end{cases}$$

זהו יצוג פרמטרי של ישר אשר עובר בנקודה $(1, 2, 3)$ ובכל וקטור כיוון $\vec{u} = (1, 0, -1)$.

לכן יש לו יצוג קנוני

$$x - 1 = \frac{z - 3}{-1}, \quad y = 2$$

המעבר בין שני הייצוגים הוא מיידי, כפי שרואים בדוגמאות.

2.2 קשרים בין ישרים ונקודות

החיתוך בין שני ישרים

מציאת חיתוך בין ישרים: בייצוג פרמטרי, פותרים מערכת של 3 משוואות ב-2 נעלמים:

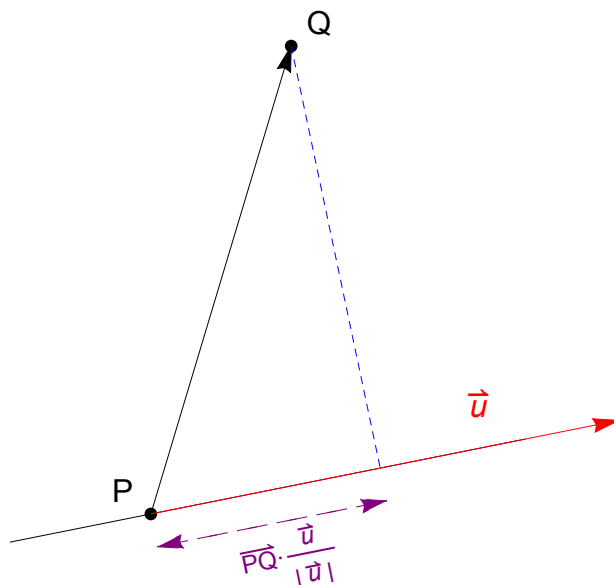
$$\begin{cases} x_0 + ta = \tilde{x}_0 + s\tilde{a} \\ y_0 + tb = \tilde{y}_0 + s\tilde{b} \\ z_0 + tc = \tilde{z}_0 + s\tilde{c} \end{cases}$$

אם יש פיתרון יחיד, הישרים **נחתכים**. אם יש אינסוף פתרונות, הישרים **מתלכדים**, כלומר: אלו שני ייצוגים של אותו ישר (בנוסף: הפתרון הכללי יהיה כלל המעבר בין הייצוגים). אם אין פיתרון, יתכן שהישרים יהיו מקבילים או מצטלבים - ראו למטה.

מרחק בין נקודה לישר

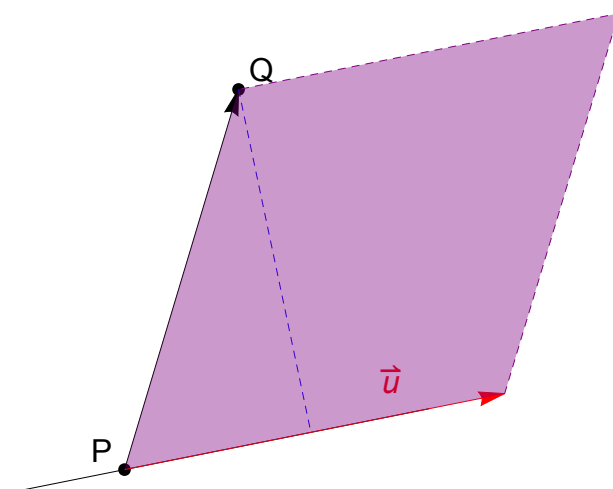
- מציאת המרחק d מנקודה Q לישר שמכיל את הנקודה P ו- $\vec{u}$ וקטור כיוון שלו:
- בדו-מימד - לפי משפט פיתגורס באיור 6,

$$|\vec{PQ}|^2 = d^2 + \left(\frac{\vec{PQ} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|} \right)^2$$



איור 6: מרחק נקודה מישר.

- בתלת-מימד - לפי הנוסחה לשטח מקבילית באיור 7,



איור 7: במרחב, הנוסחה פשוטה יותר.

$$|\vec{PQ} \times \vec{u}| = |\vec{u}| d$$

לכן

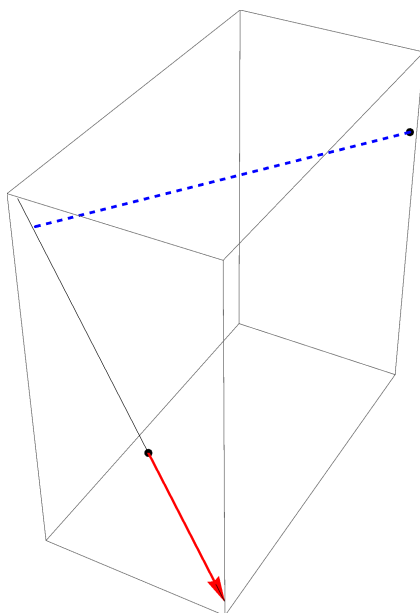
$$d = \frac{|\vec{PQ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} \quad (9)$$

נעיר שניתן להשתמש בנוסחה (9) גם בדו-מימד, על ידי הוספת רכיב שלישי 0 לכל הוקטורים.

דוגמה: נמצא את המרחק בין הנקודה $(1, 2, 3)$ לישר המתואר על ידי

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 \\ z = 1 - 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(ראו איור 8). הישר מכיל את הנקודה $P(0, -3, 1)$ ו- $\vec{u} = (2, 0, -4)$ הוא וקטור



איור 8: דוגמה לחישוב מרחק נקודה מישר.

כיוון של הישר. בעצם, יהיה יותר קל לבחור $\vec{u} = (1, 0, -2)$ (כל כפולה שונה מאפס של וקטור כיוון של ישר הוא וקטור כיוון מתאים). אז

$$\vec{PQ} = (1, 5, 2)$$

לפי נוסחה (9),

$$d = \frac{|(1, 5, 2) \times (1, 0, -2)|}{|(1, 0, -2)|}$$

נחשב:

$$(1, 5, 2) \times (1, 0, -2) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-10, 4, -5)$$

לכך

$$d = \frac{|(-10, 4, -5)|}{|(1, 0, -2)|} = \frac{\sqrt{141}}{\sqrt{5}} \approx 5.31$$

מצבים הדדיים בין ישרים

מצבים הדדיים בין ישרים: נניח שהישרים אינם זהים.

- **מקבילים** - אם וקטורי הכיוון מקבילים.
- **נחתכים** - ראו מציאת חיתוך בין ישרים.
- **מצטלבים** - בכל מצב אחר (ישרים שלא נחתכים ולא מקבילים). זה לא יכול לקרות בדו-מימד. נראה בקרוב שאפשר לחשב גם את המרחק בין ישרים מצטלבים באמצעות וקטורים.

מרחק בין ישרים מצטלבים

נניח שנתונים שני ישרים מצטלבים.

ניקח נקודה P וכן וקטור כיוון $\vec{u}$ עבור הישר הראשון, וכן נקודה Q ווקטור כיוון $\vec{v}$ עבור הישר השני. נחבר את הנקודות ונקבל וקטור $\vec{PQ}$, ונטיל וקטור זה על הוקטור $\vec{u} \times \vec{v}$ אשר ניצב לשני הישרים. זה יתכן את המרחק בין שני הישרים:

$$d = \vec{PQ} \cdot \left(\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \right) \quad (10)$$

2.3 ייצוגים של מישורים

ייצוג פרמטרי של מישור

מישורים יהיו חשובים במיוחד היות שהם יתפסו את התפקיד של משיקים. המשיק הטיפוסי לגרף של פונקציה $f(x)$ הוא ישר. המשיק הטיפוסי לגרף של פונקציה $f(x, y)$ יהיה מישור.

מישור במרחב $K \subset \mathbb{R}^3$ הוא הזזה של תת-מרחב ממימד 2:

$$K = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} + \vec{OP}$$

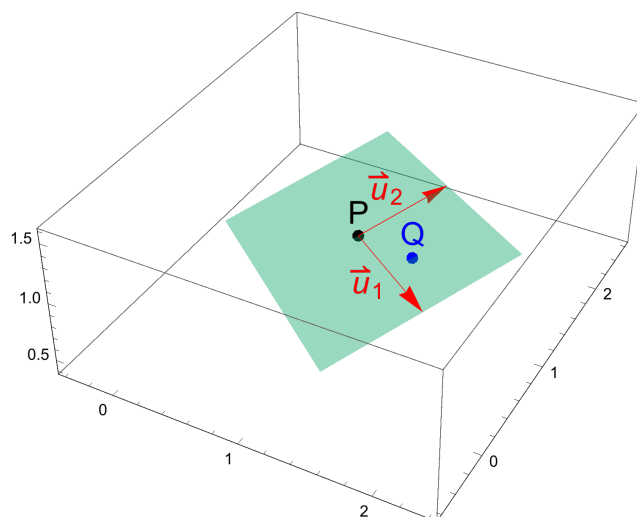
כאשר $P(x_0, y_0, z_0)$ נקודה במישור ו- $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ וקטורים שמוכלים בתוך המישור (ליתר דיוק: אם מזיזים אותם כך שיתחילו על המישור, אז נקודות הסיום שלהם גם על המישור).

לכן נקודה $Q(x, y, z)$ נמצאת על המישור אם קיימים $s, t \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + s(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2)$$

לפי רכיבים, נקבל את **הייצוג הפרמטרי של מישור**:

$$\begin{cases} x = x_0 + sa_1 + ta_2 \\ y = y_0 + sb_1 + tb_2 \\ z = z_0 + sc_1 + tc_2 \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$



איור 9: מישור מוגדר מתוך נקודה ושני כיוונים.

הייצוג הזה יהיה פחות שימושי מהייצוג הפרמטרי של ישר.

מעניין לציין שלתיאור ישר נחוץ פרמטר אחד, ולתיאור מישור נחוצים שני פרמטרים. זה חלק מתופעה כללית: לתיאור קבוצה k -ממדית (במרחב n -ממדי, $n \geq k$) נחוצים k פרמטרים.

אנו נסתפק במקרים $k = 1, 2$, אבל נראה בקרוב שימושים לקבוצות חד ודו ממדיות שאינן ישר או מישור (כלומר, שיש להם עקמומיות).

משוואת המישור

הדרך השימושית לתאר מישור היא הדרך הבאה. בהנתן מישור כנ"ל, נקודה $Q(x, y, z)$ נמצאת על המישור אם הוקטור $\vec{PQ}$ מוכל בתוך המישור, שזה אומר שהוא צירוף לינארי של $\vec{u}_1$ ו- $\vec{u}_2$.

זה קורה אם $\vec{PQ} \perp \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$, כי המכפלה הוקטורית מאונכת לשני וקטורי הכיוון. לכן התנאי הוא (נניח ש- $\vec{N} \equiv \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = (A, B, C)$):

$$0 = \vec{PQ} \cdot \vec{N} = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)$$

זה נותן לנו את משוואת המישור מתוך נקודה על המישור ווקטור שמאונך למישור, שנקרא **נורמל למישור**. אם נפתח סוגריים ונסמן $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ נקבל את המשוואה:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

דוגמה: נתון המישור $x - 2y = 3$. וקטור נורמל למישור זה הוא $\vec{N} = (1, -2, 0)$.

2.4 קשרים בין מישורים, ישרים ונקודות

מצבים הדדיים בין מישורים

שני מישורים יכולים להתלכד, להיות מקבילים או להחתך לאורך ישר. פירוט נוסף ינתן בתרגול. נעיר רק שראינו כבר תיאור של ישר כחיתוך של שני מישורים: התיאור הקנוני. מה שהופך את התיאור הקנוני לקנוני הוא שהקפדנו לכתוב את משוואות המישורים בצורה מאוד מסוימת, כך שרואים מתוכם נקודה על הישר ווקטור כיוון של הישר.

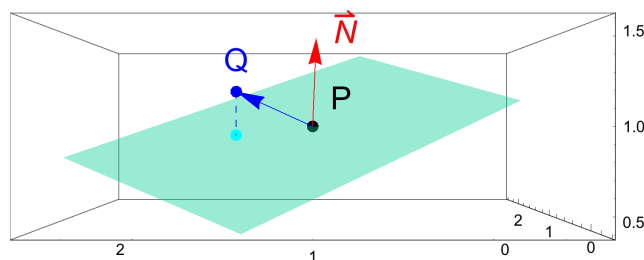
מצבים הדדיים בין ישר למישור

ישר יכול להיות מוכל במישור, להיות מקביל לו או לחתוך אותו בנקודה אחת. פרטים נוספים בתרגול. נעיר רק שאם ישר מקביל למישור, ניתן למצוא את המרחק ביניהם על ידי בחירת נקודה על הישר ומציאת מרחק מהמישור בעזרת הנוסחה הבאה.

מרחק בין נקודה למישור

בהנתן מישור K לפי הסימונים למעלה, נחשב את המרחק d מנקודה $Q(x, y, z)$ למישור. כפי שניתן לראות באיור 10,

$$d = \left| P_{\vec{N}} \vec{PQ} \right| = \frac{\left| \vec{PQ} \cdot \vec{N} \right|}{\left| \vec{N} \right|} = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



איור 10: מרחק בין נקודה למישור

המונה נראה כמו הצבת הנקודה Q במשוואת המישור. ובאמת, אם הנקודה Q נמצאת על המישור, אז $d = 0$.

סיכום של מצבים הדדיים

נקודה	נקודה	ישר	מישור
שוות או שונות	הנקודה על הישר, או שלא	הנקודה על המישור, או לא	
ישר	(כנ"ל)	מתלכדים, מקבילים או מצטלבים	הישר מוכל, מקביל או חותך פעם אחת את המישור
מישור	(כנ"ל)	(כנ"ל)	מתלכדים, מקבילים, או נחתכים לאורך ישר

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. תתי סדרות מחדו"א ב'1.

2. משפט בולצאנו וירשטראס מחדו"א ב'1.

“ *What has been affirmed without proof can also be denied without proof.*

”

Euclid