

הרצאה 4: תכונות של טורי חזקות

יוחאי מעין

הערות

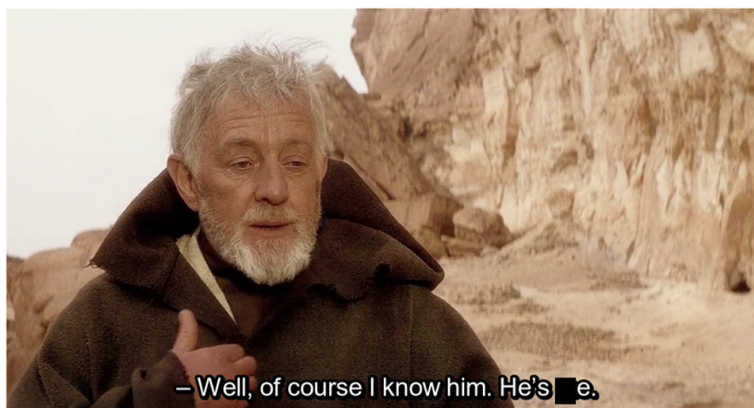
- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1 טורי חזקות (המשך)
2	1.1 משפט אינטגרציה איבר ומשפט גזירה איבר איבר
5	1.2 פונקציות אשר ניתנות לפיתוח לטור חזקות

When someone asks you if you know the series

$$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$



– Well, of course I know him. He's e.

תזכורות

משפט 1: אם $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L > 0$ אז לכל סדרה a_n מתקיים כי

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = L \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

המשפט היסודי של החדו"א:

משפט 2: תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרלית ונגדיר $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. אם f רציפה בנקודה x_0 אז F גזירה בנקודה x_0 ו- $F'(x_0) = f(x_0)$.

משפט הרציפות לטורי חזקות:

משפט 3: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות חיובי. אז $f(x)$ רציפה בתחום ההתכנסות של הטור.

1 | טורי חזקות (המשך)

1.1 משפט אינטגרציה איבר איבר ומשפט גזירה איבר איבר

אינטגרציה מסוימת איבר איבר

המשפט הבא עוסק באינטגרציה של טורי חזקות. לפי המשפט הקודם, בכל תת-קטע סגור של תחום ההתכנסות מתקיים שסכום הטור רציף ולכן אינטגרל. לכן העניין היחיד שיש להתייחס אליו הוא **אינטגרציה איבר-איבר**.

משפט 4: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R > 0$. אז לכל x בתחום ההתכנסות מתקיים ש-

$$\int_{x_0}^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$$

בנוסף, רדיוס ההתכנסות של טור האינטגרלים באגף ימין גם הוא R .

הערה: אם $0 < R < \infty$, משתמע שתחום ההתכנסות עלול לגדול על ידי התווספות של נקודות קצה, ושום דבר אחר.

אם $R = \infty$ אז תחום ההתכנסות הוא כל $\mathbb{R}$, עבור שני הטורים. כלומר, הוא זהה.

אם $R = 0$ אין טעם למשפט, היות שאז הטור מתכנס בנקודה אחת בלבד ובפרט אינו מוגדר בסביבתה.

הערה: למרות שעל פניו זה לא מאוד מעניין, גם במקרה $R = 0$ ההוכחה של שימור רדיוס ההתכנסות תקפה: $\tilde{R} = R$.

דוגמה: מכיוון ש- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ לכל $x \in (-1, 1)$, הרי שבפרט

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}$$

לכל $-1 < x < 1$ (הצבה של $-x$ לתוך השוויון של סכום טור גיאומטרי).

לכן לפי משפט האינטגרציה איבר-איבר, לכל $x \in (-1, 1)$ מתקיים ש-

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$$

כלומר, לכל $-1 < x < 1$ מתקיים ש- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \ln(1+x)$. בנוסף, טור החזקות הזה הוא טור לייבניץ מתכנס בנקודה $x = 1$, ולכן לפי רציפות השוויון נכון גם עבור $x = 1$ (הוכיחו!). כלומר:

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

אינטגרציה לא מסוימת איבר איבר

מסקנה: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R > 0$. אז

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} + C$$

בתחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

בנוסף, רדיוס ההתכנסות של טור האינטגרלים באגף ימין גם הוא R .

הערות:

- מסקנה מיידיית נוספת מהמשפט היא שלכל a, b בתחום ההתכנסות ניתן לבצע אינטגרציה מ- a עד b איבר-איבר:

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} ((b - x_0)^{n+1} - (a - x_0)^{n+1})$$

- נשים לב שטור האינטגרלים מתכנס בכל נקודה שבה הטור המקורי מתכנס. לכן בקצוות, יתכן שיתווסף קצה (למשל, בטור של $\arctan x$ שנראה מיד) אבל לא שיוחסר קצה מתחום ההתכנסות.

גזירה איבר איבר

ראינו שסכום הטור רציף וראינו שניתן לבצע אינטגרציה איבר-איבר. השאלה המתבקשת הבאה היא שאלת הגזירות: לטור חזקות כללי ראינו שיש תנאים מעט חריגים לגזירות וגזירה איבר-איבר. אבל מתברר שטור חזקות תמיד גזיר:

משפט 5: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R > 0$. אז סכום הטור גזיר בקטע $(x_0 - R, x_0 + R)$, ולכל x מתקיים ש-

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

בנוסף, רדיוס ההתכנסות של טור הנגזרות באגף ימין גם הוא R . לבסוף, אם טור הנגזרות מתכנס בנקודת קצה, אז הטור המקורי מתכנס בנקודת קצה זו, ובנוסף הנגזרת החד-כיוונית של הטור המקורי קיימת שם ושווה לטור הנגזרות.

הערה: מהמשפט משתמע שבגזירה איבר איבר של טור חזקות אפשר אולי "לאבד" קצוות, ושום דבר אחר.

דוגמה: נחשב את סכום הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}$.

הרעיון: נחשב את סכום הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}}$ ונציב $x = \frac{1}{2}$. קל לבדוק ש- $R=1$, אבל לא נזדקק לזה. במקום זה נסמן את סכום הטור ב- $f(x)$ וניעזר בפעולות מותרות שמאפשרות לעקוב אחרי רדיוס ההתכנסות.

למשל, לפי גזירה איבר-איבר, שלא משנה את רדיוס ההתכנסות,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

הטור הזה הוא טור גיאומטרי שהוצב בו x^2 , ולכן רדיוס ההתכנסות שלו הוא 1 (כלומר, גם של הטור המקורי) ו-

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

לכן

$$f(x) - f(0) = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

לכל $x \in (-1, 1)$.

לבסוף, לפי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}}$ נקבל ש- $f(0) = 0$, ולסיכום

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in (-1, 1)$$

לכן

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln 3$$

בדקו הבנתכם - מדוע רדיוס ההתכנסות בטור הגיאומטרי לאחר הצבת x^2 נשאר 1?
?

הערות:

- מכיוון שטור הנגזרות הוא טור חזקות בעל אותו רדיוס התכנסות, גם הוא גזיר בכל נקודה פנימית של תחום ההתכנסות. כלומר, הטור המקורי גזיר פעמיים - ובאינדוקציה, הוא גזיר מכל סדר!
- מתוך ההוכחה רואים שטור הנגזרות עלול להתבדר בנקודת קצה שבה הטור המקורי התכנס, אבל לא להיפך.

מסקנה: טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R > 0$ הוא גזיר אינסוף פעמים בקטע $(x_0 - R, x_0 + R)$ (אם $R = \infty$, אז בכל $\mathbb{R}$).

1.2 פונקציות אשר ניתנות לפיתוח לטור חזקות

הגדרה של ניתנות לפיתוח לטור חזקות ותנאי הכרחי

בסעיף הזה נעסוק בשאלה יסודית הקשורה בטורי חזקות, ובאופן יסודי יותר בפונקציות בכלל: בהינתן פונקציה $f(x)$ שמוגדרת בסביבת הנקודה x_0 , האם קיים טור חזקות שמתכנס ל- $f(x)$ בסביבת x_0 ?

הגדרה: פונקציה $f(x)$ ניתנת לפיתוח לטור חזקות בסביבת $x = x_0$ אם קיים טור חזקות כך שמתקיים

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

בסביבה של $x = x_0$.

בפרט, זה אומר שרדיוס ההתכנסות של טור החזקות בהגדרה הוא חיובי.

דוגמאות:

1. $\frac{1}{1-x}$ בסביבת $x = 0$.

2. $\ln(1+x)$ בסביבת $x = 0$.

3. $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ בסביבת $x = 0$.

בכל הדוגמאות אנו יודעים שהן אכן ניתנות לפיתוח לטור חזקות היות שמצאנו בעבר טורי חזקות אשר שווים להן.

המניע לעיסוק בשאלה הזו מצריך תיאור והצדקה. ראינו שלטורי חזקות יש תכונות מיוחדות. לכן פונקציות ש"ניתנות לפיתוח לטור חזקות" יהיו בעלי תכונות מיוחדות גם הן. למשל:

משפט 6. נניח ש- $f(x)$ ניתנת לפיתוח לטור חזקות בסביבת $x = x_0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

או $f(x)$ גזירה מכל סדר בנקודה x_0 , וטור החזקות ששווה לה בסביבת $x = x_0$ הוא יחיד. בנוסף, מקדמיו הם מקדמי טיילור של $f(x)$:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

הגדרה: נניח כי f גזירה מכל סדר בנקודה x_0 . הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ מכונה טור טיילור של f סביב x_0 .

הערה: המשפט לא אומר שאם f גזירה אינסוף פעמים בסביבת $x = x_0$ אז f שווה לטור טיילור שלה בסביבה זו.

דוגמאות:

1. האם $f(x) = |x|$ ניתנת לפיתוח לטור חזקות?

סביב $x = 0$, לא, היות שאינה גזירה בנקודה $x = 0$.

סביב כל נקודה אחרת, כן, היות שקיימת סביבה בה היא כבר פולינום ולכן טור חזקות. למשל, עבור נקודות חיוביות,

$$f(x) = |x| = x = x_0 + (x - x_0)$$

2. האם $f(x) = \sin x$ ניתנת לפיתוח לטור חזקות סביב $x = 0$?

היא גזירה מכל סדר, אך זהו תנאי הכרחי בלבד. לכן בשלב זה, לא ידוע.

אבל, נראה מיד שכן.

תנאי מספיק לניתנות לפיתוח לטור חזקות

כלומר, תנאי הכרחי לכך ש- $f(x)$ ניתנת לפיתוח לטור חזקות סביב x_0 הוא ש- $f(x)$ תהיה גזירה "אינסוף פעמים" ב- x_0 . האם זהו תנאי מספיק?

דוגמה: בחדו"א 1 פגשתם את הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ראיתם ש- f גזירה אינסוף פעמים ב-0 ושלכל n מתקיים $f^{(n)}(0) = 0$. לכן טור טיילור הוא טור של אפסים, שבוודאי לא שווה ל- $f(x)$ באף סביבה של $x = 0$.

ננסח מחדש את השאלה בראש הסעיף: אילו פונקציות שגזירות אינסוף פעמים ב- x_0 שוות לטור טיילור שלהן בסביבת x_0 ?

לפי הדוגמה הנ"ל, גם פונקציה שגזירה אינסוף פעמים עלולה שלא להיות שווה לטור טיילור שלה. נדגיש שגם אם $R > 0$ עבור טור טיילור, עדיין יתכן שאין שוויון לפונקציה. למשל, בדוגמה הנ"ל, $R = \infty$. אפשר לסכם את ההבנות שלנו עד כה במשפט הבא:

משפט 7: תהי $f(x)$ גזירה אינסוף פעמים ב- x_0 . אז $f(x)$ ניתנת לפיתוח לטור חזקות סביב x_0 אם ורק אם השארית שואפת לאפס: לכל x בסביבת x_0 מתקיים ש-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right) = 0$$

במקרה זה, טור החזקות הנ"ל יחיד והוא טור טיילור של f סביב x_0 .

חשוב לשים לב שהתנאי במשפט אינו תנאי על זנב הטור. זה לא מספיק שיתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = 0$$

למשל, בדוגמה שראינו עם פונקציה שאינה אפס עם טור טיילור שווה לאפס, זנב הטור בוודאי שואף לאפס אבל אין שוויון בין הטור לבין הפונקציה. בעצם, התנאי של זנב הטור שואף לאפס הוא תנאי על כך שהטור מתכנס, אבל הוא לא מספיק כדי שיתקיים שוויון לפונקציה. בחדו"א 1 ראיתם תנאי מספיק לכך שהשארית שואפת לאפס בסביבה של x_0 : הנגזרות של $f(x)$ חסומות במשותף בקטע. לכן:

משפט 8: תהי $f(x)$ גזירה אינסוף פעמים בקטע $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. נניח שקיים $K > 0$ כך שלכל $n = 0, 1, \dots$ ולכל $x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$ מתקיים ש- $|f^{(n)}(x)| \leq K$. אז $f(x)$ שווה לטור טיילור שלה בקטע $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$.

דוגמאות

נקבל מיד פיתוחים של פונקציות מוכרות לטור חזקות:

דוגמאות:

1. בחדו"א 1 הודגם שעבור $f(x) = \sin x$ מתקיים התנאי במשפט בכל קטע. לכן לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים ש-

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

באופן דומה, לכל $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

2. נתבונן בפונקציה $f(x) = e^x$. התנאי של נגזרות חסומות במשותף לא מתקיים בכל $\mathbb{R}$, אבל הוא מתקיים בכל קטע. לכן בכל זאת לכל x מתקיים ש-

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים מאלגברה לינארית לפני ההרצאה הבאה:

1. מרחבי מכפלה פנימית ובמיוחד המכפלה הסקלרית.

2. אי שוויון קושי שוורץ.

3. היטל אורתוגונלי.

“ The shortest path between two truths in the real domain passes through the complex domain.

”

Jacques Hadamard