

הרצאה 3: טורי חזקות

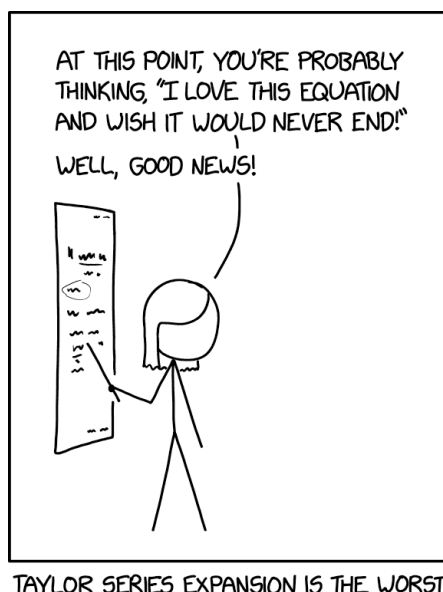
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1 טורי חזקות
2	1.1 הגדרה, דוגמאות ותחום ההתכנסות
4	1.2 התכנסות במידה שווה ומשפט הרציפות



תזכורות

עבור סדרה כללית של מספרים $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, **הגבול העליון** של הסדרה הוא הגבול החלקי הגדול ביותר שלה. הוא מסומן $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$. למשל, $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1$.

מבחן השורש של קושי (Augustin-Louis Cauchy, 1789 - 1857):

משפט 1: יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור, ונסמן $\sqrt[n]{|a_n|}$. אם $q = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ אז הטור מתכנס בהחלט, ואם $q > 1$ אז הטור מתבדר.

1 | טורי חזקות

1.1 הגדרה, דוגמאות ותחום ההתכנסות

הגדרה של טור חזקות ודוגמאות

בפרק הקודם דיברנו על טורים של פונקציות. הפרק הזה נדבר על סוג אחד מיוחד של טור פונקציות, שמכונה טור חזקות. טור חזקות הוא טור מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, כאשר $a_0, a_1, \dots$ מכונים **המקדמים של הטור**. ליתר דיוק:

הגדרה: טור חזקות הוא טור מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, כאשר $a_0, a_1, \dots$ מכונים **המקדמים של הטור** ו- x_0 היא נקודה נתונה.

הערה: נעיר שעבור $n = 0$ מופיע הביטוי $a_0 x^0$. הכוונה היא כאן ש- $x^0 = 1$, גם עבור $x = 0$. בדרך כלל אין מוסכמה ש- $0^0 = 1$, אבל בפולינומים והכללתם טורי חזקות, כן.

דוגמאות:

1. טור חזקות מוכר: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. לכל x , זהו טור גיאומטרי שידוע לנו שמתכנס אם ורק אם $|x| < 1$ ובנוסף גם ידוע מה סכומו:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

מעניין לשים לב שהפונקציה שמייצגת את סכום הטור מוגדרת באופן טבעי גם עבור x מחוץ לתחום ההתכנסות. נדבר בהמשך מעט על הפרט המסתורי הזה.

2. נתבונן בטור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, כלומר, $a_n = \frac{1}{n}$ ($a_0 = 0$).
אם נציב $x = 0$, נקבל את הטור המספרי $\sum_{n=1}^{\infty} 0$ שסכמו 0.
אם נציב $x = 1$, נקבל את הטור המספרי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ שהוא הטור ההרמוני. זהו טור מתבדר.
אם נציב $x = -1$, נקבל את הטור המספרי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ שהוא הטור ההרמוני המתחלף. זהו טור מתכנס.
אם נציב $x = 2$, נקבל את הטור המספרי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$, שמתבדר למשל לפי מבחן השורש.
אם נציב $x = \frac{1}{3}$, נקבל את הטור המספרי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$, שמתכנס למשל לפי מבחן השורש.
3. נתבונן בטור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, כלומר, $a_n = \frac{1}{n!}$.
אם נציב $x = 0$, נקבל את הטור המספרי $\sum_{n=1}^{\infty} 0$ שסכמו 0. זה בעצם קורה בכל טור חזקות!
למעשה, לכל x , הטור שמתקבל מתכנס (למשל לפי מבחן המנה).

תחום ורדיוס ההתכנסות

בסעיף הזה נבין יותר לעומק את תחומי ההתכנסות של טורי חזקות. נזכיר שתחום ההתכנסות הוא קבוצת כל המספרים $x \in \mathbb{R}$ שבהם הטור מתכנס.
תחום ההתכנסות של טור פונקציות כללי יכול להיות כל דבר שניתן לדמיין. הוא יכול להיות נקודה בודדת, 4 נקודות, $\mathbb{Q}$, וכל קבוצה אחרת של מספרים ממשיים.
מנגד, תחום ההתכנסות של טור חזקות הוא תמיד קבוצה פשוטה מאוד: קטע (או קרן). ואפילו לא כל קטע. זו תכלית המשפט הבא:

משפט 2: יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ טור חזקות. אז בהכרח מתקיימת אחת משלוש האפשרויות הבאות:

1. קיים מספר $R > 0$ כך שהטור מתכנס בהחלט לכל $|x - x_0| < R$ ומתבדר לכל $|x - x_0| > R$.

2. הטור מתכנס רק בנקודה $x = x_0$; " $R = 0$ ".

3. הטור מתכנס בהחלט לכל $x \in \mathbb{R}$; " $R = \infty$ ".

המספר R מכונה **רדיוס ההתכנסות** של הטור. מתוכן ההוכחה אנו רואים את **נוסחת קושי הדמר** עבור רדיוס ההתכנסות:

מסקנה: רדיוס ההתכנסות תמיד נתון על ידי

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

תחת המוסכמה כי $\frac{1}{0} = \infty$ וכן $\frac{1}{\infty} = 0$.

הערות ודוגמאות לגבי רדיוס התכנסות ותחום התכנסות

• תחום ההתכנסות יכול להיות או יחידון $\{x_0\}$; או כל $\mathbb{R}$; או אחד מארבעת הקטעים

$$(x_0 - R, x_0 + R), (x_0 - R, x_0 + R], [x_0 - R, x_0 + R), [x_0 - R, x_0 + R]$$

• המשפט לא נותן לנו שום מידע לגבי ההתכנסות בקצוות $x = x_0 \pm R$, ובאמת כל אפשרות תיתכן.

דוגמה: נמצא את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (חדי העין יבחינו שכבר מצאנו אותו בעצם; נעיר בסוף).

$$R = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1, \text{ לפי נוסחת קושי-הדמר,}$$

בנוסף, בנקודה $x = 1$ מתקבל הטור ההרמוני המתבדר ובנקודה $x = -1$ מתקבל הטור ההרמוני המתחלף שמתכנס, ולכן תחום ההתכנסות הוא $[-1, 1)$.

בעצם, לא היינו צריכים כלל את הנוסחה כדי למצוא את תחום ההתכנסות, מפני שהתופעה של התכנסות ב-1- והתבדרות ב-1 יכולה להתרחש רק על שפת תחום ההתכנסות.

נוסחת דלמבר ודוגמאות של תחום התכנסות

הנוסחה הבאה מכונה **נוסחת דלמבר**. ניתן להוכיח אותה באופן דומה לנוסחת קושי הדמר, בעזרת מבחן המנה.

מסקנה: יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות. אם הגבול $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ קיים במובן הרחב, אז R הוא רדיוס ההתכנסות של הטור.

דוגמה: נמצא את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty, \text{ לפי נוסחת דלמבר,}$$

לכן הטור מתכנס לכל $x \in \mathbb{R}$.

1.2 התכנסות במידה שווה ומשפט הרציפות

התכנסות במידה שווה ומשפט אבל

יכולנו להיות מרוצים מאוד כבר ממה שלמדנו על טורי חזקות: תחום ההתכנסות כמעט נקבע לגמרי על ידי מספר אחד בר חישוב שנקרא רדיוס ההתכנסות. אבל מתברר שיש הרבה יותר מה לומר על טורי חזקות, והם עושים ניסים ונפלאות בהתחשב בכמות במאמץ שהשקענו כה בהתעסקות עם סדרות וטורים של פונקציות.

למשל, הם תמיד מתכנסים במידה שווה! טוב, כמעט. הנה משפט בסיסי ופשוט:

משפט 3: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R > 0$. אז לכל $0 < r < R$ מתקיים שהטור מתכנס במידה שווה בקטע $[x_0 - r, x_0 + r]$.

דוגמה: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ הוא בעל רדיוס התכנסות $R = 1$ ולכן הוא מתכנס במ"ש בקטע $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

לכן בעצם טור חזקות מתכנס במידה שווה בכל קטע סגור שמוכל ב- $(-R, R)$. אבל מתברר שאפשר לומר אף יותר: זהו **משפט אבל**.

משפט 4: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ טור חזקות ויהי R רדיוס ההתכנסות שלו, $0 < R < \infty$. התנאים הבאים שקולים:

1. הטור מתכנס בנקודה $x = x_0 + R$.

2. הטור מתכנס במ"ש בקטע $[x_0, x_0 + R]$.

3. הטור מתכנס במ"ש בקטע $[x_0, x_0 + R)$.

יש גרסה אנלוגית של המשפט עבור התכנסות בנקודה $x = x_0 - R$.

דוגמאות:

1. עבור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ נקבל רדיוס התכנסות

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$$

עבור $x = 1$ נקבל $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ שמתכנס.

עבור $x = -1$ נקבל $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ שמתכנס בהחלט.

לכן הטור הנתון מתכנס במ"ש בקטע $[-1, 0]$ וכן בקטע $[0, 1]$, וזה תרגיל לא קשה להוכיח שהוא לכן מתכנס במ"ש בקטע $[-1, 1]$.

2. ראינו שתחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ הוא $[-1, 1)$. לכן:

הקטע I האם מתכנס במ"ש בקטע I ?

$[-1, 1]$	לא
$(-1, 1)$	לא
$[-1, 0]$	כן
$[0, 1]$	לא
$(-1, 0.9]$	כן
$(-0.9, 1]$	לא

מסקנה: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ טור חזקות ויהי R רדיוס ההתכנסות שלו, $0 < R < \infty$.

אז הטור מתכנס במידה שווה בקטע $[x_0 - R, x_0 + R]$ אם ורק אם הוא מתכנס בשתי הנקודות $x_0 \pm R$.

בפרט, אם טור חזקות מתכנס נקודתית בקטע **סגור וחסום**, אז הוא מתכנס בו במידה שווה.

משפט הרציפות

נניח שנתון טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. סכום הטור $f(x)$ הוא פונקציה שמוגדרת בתחום ההתכנסות של הטור. נרצה לדבר על תכונות של $f(x)$.

נציין שאם $R = 0$ אז $f(x)$ מוגדרת בנקודה אחת בלבד. במקרה הזה אין שום דבר מעניין לומר עליה. לכן בכל הסעיף הזה נניח ש- $R > 0$.

משפט 5: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות חיובי. אז רציפה בתחום ההתכנסות של הטור.

בנקודות הקצה הכוונה לרציפות חד-צדדית, אם הטור מתכנס שם.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. משפטי הרציפות ואינטגרציה איבר איבר לטור פונקציות שמתכנס במ"ש.
2. המשפט היסודי של החדו"א, ובאופן יותר ספציפי: פונקציה צוברת שטח של פונקציה רציפה היא פונקציה קדומה שלה.
3. ההגדרה של פולינום טיילור, ופולינומי טיילור מרכזיים חשובים.
4. המשפט עבור פולינום טיילור אשר מבטיח כי $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

“ There is no let up! No end to it! Accursed problems! Innumerable calculations. Endless fighting. Signs. Formulas. Theorems besetting me from dawn to dusk!

”

Augustin Louis Cauchy