

הרצאה 2: התכנסות במידה שווה וטורי פונקציות

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1	התכנסות במידה שווה
2	1.1	משפט הרציפות, האינטגרביליות ומשפט הגזירות
5	2	טורי פונקציות
5	2.1	הגדרות ומבחן ה- M של וירשטראס
8	2.2	משפט הרציפות, משפט אינטגרציה וגזירה איבר איבר



תזכורות

משפט 1: אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט, אז הוא מתכנס. בנוסף, במקרה זה מתקיים אי שוויון המשולש

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

משפט 2: תהי $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות שמוגדרות בקבוצה I , ותהי $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. לכל n נגדיר

$$M_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$$

אז $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{במ"ש}} f$ אם ורק אם $M_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

1 | התכנסות במידה שווה

1.1 משפט הרציפות, האינטגרליות ומשפט הגזירות

משפט הרציפות

בסעיף הזה נכיר יתרונות של התכנסות במ"ש על פני התכנסות נקודתית בלבד. המוטיב הוא: תכונות שונות של פונקציות נשמרות תחת התכנסות במ"ש, אבל לא תמיד תחת התכנסות נקודתית. המשפט הראשון מדבר על תכונת הרציפות.

דוגמאות:

1. ראינו שסדרת הפונקציות $f_n(x) = x^n$ מתכנסת נקודתית אך לא במידה שווה לפונקציה הגבולית

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

בקטע $[0, 1]$.

כל איברי הסדרה רציפות, אבל הפונקציה הגבולית לא רציפה. כלומר, הרציפות "הלכה לאיבוד".

2. ראינו שסדרת הפונקציות $f_n(x) = \frac{1}{x^2+n}$ מתכנסת במידה שווה בכל $\mathbb{R}$ לפונקציה הגבולית $f(x) \equiv 0$.

כל איברי הסדרה רציפות, וכך גם הפונקציה הגבולית.

כלומר, אם אין התכנסות במידה שווה, הרציפות **יכולה** בכל זאת להישמר. היא פשוט לא **חייבת** להישמר.

3. ראינו שסדרת הפונקציות $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ מתכנסת נקודתית לפונקציה הגבולית $f(x) \equiv 0$ אך לא מתכנסת במידה שווה ($\mathbb{R}$ -ב).

שוב, כל איברי הסדרה רציפות, וכך גם הפונקציה הגבולית.

משפט 3. נניח ש- $f \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{במ"ש}} f_n$ בקבוצה I . אם רציפה בנקודה $x_0 \in I$ לכל n , אז רציפה בנקודה $x_0 \in I$ (אם x_0 היא נקודת קצה של I , אז הכוונה לרציפות חד צדדית).

דוגמה: האם סדרת הפונקציות $f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$ מתכנסת במידה שווה בקטע $[-1, 1]$?

נחשב כמו בדוגמאות קודמות מועמדת לפונקציה גבולית בעזרת התכנסות נקודתית. אם $x \neq 0$ אז $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ ועבור $x = 0$ מתקיים $f_n(0) \equiv 0$ לכל n . לכן המועמדת היא

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

זו פונקציה לא רציפה ו- f_n רציפה לכל n ולכן לפי המשפט, אין התכנסות במידה שווה.

משפט האינטגרליות

משפט 4. תהי סדרה של פונקציות אינטגרליות בקטע $[a, b]$, ונניח ש- $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{במ"ש}} f$ בקטע $[a, b]$. אז $f(x)$ אינטגרלית בקטע $[a, b]$, ו-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

כלומר,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

לפעמים אומרים שניתן להחליף סדר בין גבול לאינטגרציה, או שהגבול נכנס לתוך האינטגרל. נציין שאם f_n רציפה לכל n אז לפי משפט הרציפות גם f רציפה ולכן אינטגרלית.

דוגמה: בהתכנסות נקודתית, גם אם ידוע שהגבול הנקודתי אינטגרבי, סדרת האינטגרלים לא חייבת להתכנס לאינטגרל של הגבול.

למשל, $f_n(x) = \frac{2n^2x}{(1+n^2x^2)^2}$ מתכנסת נקודתית ל- $f(x) \equiv 0$ בקטע $[0, 1]$, אבל

$$\int_0^1 f_n = \int_0^1 \frac{2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} dx = -\frac{1}{1+n^2x^2} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{1+n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \neq 0$$

בפרט, זו הוכחה שאין כאן התכנסות במידה שווה.

הערה: זהו משפט חד כיווני - אם יש התכנסות במידה שווה אז אינטגרליות נשמרת וכו'. יתכן שמסקנת המשפט תתקיים מבלי שתהיה התכנסות במידה שווה. כלומר, אי אפשר לומר שאם האינטגרלים מתכנסים לאינטגרל של הפונקציה הגבולית אז יש התכנסות במידה שווה.

מסקנה ודוגמאות נגדיות עבור משפט האינטגרליות

משפט 5: נניח ש- $f \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{במ"ש}} f_n$ בקטע $[a, b]$ ו- f_n אינטגרלית בקטע לכל n . נסמן $F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ ו- $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. אז $F_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{במ"ש}} F$ בקטע $[a, b]$.

ההוכחה דומה להוכחת משפט האינטגרציה.

הערה: כפי שניתן לראות מההוכחה, אין חשיבות לכך שגבול האינטגרציה התחתון הוא דווקא a . אפשר להחליף את a בכל ערך קבוע $x_0 \in [a, b]$.

דוגמה: המשפט לא נכון עבור אינטגרל מוכלל בקרן. למשל,

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 0 \leq x \leq n \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{במ"ש}} 0$$

בקרן $[0, \infty)$. אבל $\int_0^\infty f_n \equiv 1$ בעוד ש- $\int_0^\infty 0 = 0$.

המשפט דווקא נכון עבור אינטגרל מוכלל בקטע. נסו להוכיח.

משפט הגזירות

דוגמאות:

- התכנסות במידה שווה לא משחקת יפה עם גזירות כמו עם רציפות ואינטגרליות. למשל, סדרת הפונקציות $|x|^2, |x|^{1+\frac{1}{2}}, |x|^{1+\frac{1}{3}}, \dots$ (כלומר $f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$) מתכנסת במידה שווה לפונקציה הגבולית $f(x) = |x|$ בקטע $[-1, 1]$ (הוכיחו!). אבל f_n גזירה לכל n ו- f אינה גזירה.

2. סדרת הפונקציות $f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}$ מתכנסת במידה שווה ל- $f(x) \equiv 0$ בכל $\mathbb{R}$.
ואכן, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

אבל $f'_n(x) = n \cos(nx)$ לא מתכנסת אפילו נקודתית, כלומר, התכנסות במידה שווה אינה גוררת התכנסות של סדרת הנגזרות.

משפט 6. תהי $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ סדרה של פונקציות שמוגדרות בקטע I . נניח שמתקיימים התנאים הבאים:

1. קיימת $x_0 \in I$ כך ש- $(f_n(x_0))_{n=1}^\infty$ סדרה מתכנסת.
 2. לכל n , $f_n(x)$ גזירה ב- I .
 3. סדרת הפונקציות $(f'_n(x))_{n=1}^\infty$ מתכנסת במ"ש ב- I לפונקציה גבולית $g(x)$.
- אז $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ מתכנסת נקודתית בכל I לפונקציה גבולית $f(x)$ אשר גזירה ב- I , ומתקיים כי $f' = g$. בנוסף, $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ מתכנסת במ"ש ל- f בכל תת קטע חסום של I .

הערות:

- בסעיף 3, מספיק שתהיה התכנסות במידה שווה בכל תת קטע חסום של I .
 - אם I קטע חסום אז המסקנה היא פשוט: $(f_n)_{n=1}^\infty$ מתכנסת במידה שווה בכל I .
- הוכחת המשפט אינה קצרה, ולא נכסה אותה. אבל, נסו להוכיח את המשפט עם ההנחה המקלה כי f'_n רציפה לכל n - זה כבר קצר.

2 | טורי פונקציות

2.1 הגדרות ומבחן ה- M של וירשטראס

הגדרה של טור פונקציות וסוגי ההתכנסות שלו

- בפרק הזה נדבר על טורי פונקציות. כפי שנראה כבר בקרוב (ותראו רבות גם בהמשך דרככם), יש ערך גדול לקרב פונקציות מעניינות דווקא באמצעות סכומים:
- א. אם יש הפרעה במערכת, לעיתים קרובות מפתחים לפי סדר גודל (כמו בפולינום טיילור).
 - ב. אחד מהכלים המרשימים ביותר בחקר אותות הוא טור פורייה, שמאפשר לפרק אות כללי מאוד לפי תדירויות.

יש אנלוגיה בין "סדרות וטורים של מספרים" לבין "סדרות וטורים של פונקציות": רוב ההגדרות והמשפטים שנציג יהיו מוכרים מהפרק הקודם, וההוכחות של המשפטים יהיו רק הבחנה שאנחנו כבר מכירים אותם. בנוסף, נפגוש מבחן התכנסות מאוד שימושי.

הגדרה: טור פונקציות הוא ביטוי מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ כאשר סדרת הפונקציות $(f_n(x))$ מוגדרת בקטע או קרן I . הסכום החלקי ה- n הוא הפונקציה $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$. בדומה לטור מספרים, בנקודת היציאה שלנו טור פונקציות הוא ביטוי לא מוגדר.

דוגמאות:

1. טור פונקציות: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$.
2. עוד טור פונקציות: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$.
3. טור הפונקציות $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ מוכר לנו, היות שזהו טור הנדסי. כאן לכל $-1 < x < 1$ הטור מתכנס, וסכומו $\frac{1}{1-x}$. נסמן זאת

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1$$

הגדרה: יהי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ טור פונקציות בקטע או קרן I .

1. נאמר שהטור מתכנס בנקודה $x_0 \in I$ אם טור המספרים $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ מתכנס. כלומר, אם הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_0)$ קיים. במקרה זה, נסמן $s(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_0)$.
 2. קבוצת הנקודות $x \in \mathbb{R}$ בהן הטור מתכנס מכונה תחום ההתכנסות של הטור. בפרט, זהו תחום ההגדרה של $s(x)$.
 3. נאמר שהטור מתכנס נקודתית בקבוצה A אם הוא מתכנס בכל נקודה $x \in A$.
 4. נאמר שהטור מתכנס במידה שווה ב- A אם $s_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{במ"ש}} s(x)$ ב- A .
- בכל המקרים, הפונקציה $s(x)$ מכונה סכום הטור.

תנאי הכרחי להתכנסות במידה שווה של טור פונקציות

משפט 7: אם טור הפונקציה $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במידה שווה ב- I , אז $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{במ"ש}} 0$.

הוכחת המשפט תושאר כתרגיל.

דוגמה: טור הפונקציות $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ לא מתכנס במידה שווה בקטע $(0, 1)$ כי

$$\sup \{|x^n| : x \in (0, 1)\} = 1$$

לא שואף לאפס כאשר $n \rightarrow \infty$, ולכן לפי משפט 2 (קריטריון הסופרמום) סדרת הפונקציות x^n לא מתכנסת במידה שווה לאפס בקטע $(0, 1)$.

מבחן ה-M של וירשטראס

המשפט הבא הוא מבחן התכנסות שימושי מאוד להתכנסות במ"ש של טור פונקציות. הוא מכונה **מבחן ה-M של וירשטראס**.

משפט 8. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ טור פונקציות בקטע או קרן I . נניח שקיים טור חיובי מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ כך שלכל n ולכל $x \in I$ מתקיים ש-

$$|f_n(x)| \leq M_n$$

או $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש ב- I .

דוגמאות:

$$1. \text{ נתון הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}$$

$$\text{לכל } n \text{ קבוע ולכל } x \in \mathbb{R}, \left| \frac{\cos(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס ($p = 2 > 1$) ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}$ מתכנס במ"ש ב- $\mathbb{R}$.

בפרט, כפי שנראה בקרוב ובדומה לסדרה של פונקציות רציפות המתכנסת במידה שווה, הסכום של טור זה הוא פונקציה רציפה.

מסתבר (את זה לומדים להוכיח בקורס באנליזה הרמונית):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

זו דוגמה של **טור פורייה**.

נעיר שהצבה של $x = 0$ בשוויון האחרון מוביל אל

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

בנוסף, הצבה של $x = \pi$ מוביל אל

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(n\pi)}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$2. \text{ הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(ne^x - n^2 x)}{n^2} \text{ מתכנס במידה שווה בכל } \mathbb{R}, \text{ כי } \left| \frac{\sin(ne^x - n^2 x)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \\ \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

הערה: במבחן ה-M של וירשטראס מתקבל בעצם באופן מיידי כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ מתכנס במ"ש ב- I . מתברר שזה תמיד גורר שהטור ללא הערכים המוחלטים מתכנס במ"ש (נסו להוכיח). במקרה כזה נאמר בעתיד שהטור **מתכנס בהחלט במ"ש ב- I** .

2.2 משפט הרציפות, משפט אינטגרציה וגזירה איבר איבר**משפט הרציפות ומשפט האינטגרציה איבר איבר**

משפט 9: נניח שטור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש בקטע I . אם $f_n(x)$ רציפה בנקודה $x_0 \in I$ לכל n , אז סכום הטור $s(x)$ רציף בנקודה x_0 .

המשפט הבא מתייחס לאינטגרציה, ומכונה **אינטגרציה איבר-איבר**.

משפט 10: נניח ש- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש בקטע $[a, b]$. אם f_n אינטגרלית בקטע לכל n , אז סכום הטור אינטגרלי בקטע ו-

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

דוגמה: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(nx)}{e^n}$ מתכנס במידה שווה בקטע $[0, \pi]$ לפי מבחן וירשטראס:

$$\left| \frac{n \sin(nx)}{e^n} \right| \leq \frac{n}{e^n}$$

ו- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n} < \infty$ לפי מבחן השורש (למשל).

אין לנו שום דרך לחשב את סכומו של הטור, אבל בעזרת אינטגרציה איבר-איבר נוכל לחשב את האינטגרל שלו:

$$\int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(nx)}{e^n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{n \sin(nx)}{e^n} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{e^{2k-1}} = \frac{2e}{e^2 - 1}$$

הערה: המשפט על אינטגרציה איבר-איבר לא נכון עבור אינטגרלים מוכללים!

משפט הגזירה איבר איבר

המשפט הבא מתייחס לגזירה, ומכונה **גזירה איבר-איבר**.

משפט 11: יהי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ טור פונקציות בקטע I . נניח שמתקיימים התנאים הבאים:

1. קיימת $x_0 \in I$ כך ש- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ טור מתכנס.

2. לכל n , $f_n(x)$ גזירה ב- I .

3. טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ מתכנס במ"ש ב- I .

אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס נקודתית ב- I , סכום הטור גזיר בכל I , וכן

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

לכל $x \in I$.בנוסף, הטור מתכנס במידה שווה בכל תת קטע חסום של I .**הערה:** אם I קטע חסום אז טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במידה שווה בכל I .**דוגמה:** טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{-nx} \cos(nx) + \frac{1}{n})$ בקטע $[1, \infty)$ מקיים את תנאים 2, 3 במשפט אך לא את תנאי 1. הוא למעשה לא מתכנס כלל בקטע ולכן אין כל טעם בשאלה של גזירות או גזירה.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. גבול עליון של סדרה: $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

2. מבחן השורש להתכנסות של טור מספרים.

“ If you wish to become a storyteller, here is a hint: sell your labor, but not your mind. Give me ten hours a day scrubbing a deck, and oh the stories I could imagine. Give me ten hours adding sums, and all you’ll have me imagining at the end is a warm bed and a thought-free evening. ”

Brandon Sanderson, Tress of the Emerald Sea