

הרצאה 1: התכנסות במידה שווה

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1	התכנסות במידה שווה
2	1.1	התכנסות נקודתית, התכנסות במידה שווה
5	1.2	תנאי ה-M להתכנסות



1 | התכנסות במידה שווה

1.1 התכנסות נקודתית, התכנסות במידה שווה

מוטיבציה לסדרות של פונקציות

יש (לפחות) שתי סיבות לחקור משהו כמו $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

1. יתכן שתיתקלו בפונקציה מסובכת כמו e^x ואז יתכן שיהיה כדאי לקרב אותה באמצעות פונקציות פשוטות (כמו פולינומים). למשל, פולינום טיילור:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right)$$

2. לעיתים מחפשים פונקציה, וזה קשה. למשל, ידוע כי $u(x, t)$ מקיימת משהו כמו $u_{tt} = u_{xx}$. זה נקרא **משוואת הגלים**. זו משוואה דיפרנציאלית חלקית.

במצבים כאלה כדאי לנסות למצוא $u(x, t)$ שהיא טור של פונקציות פשוטות. במקרה הזה, באמצעות **טור פורייה**.

נרצה להבין את המשמעות והטכניקה מאחורי המושגים הללו.

התכנסות נקודתית

בפרק זה נדבר על התכנסות של סדרה של פונקציות. נתחיל מדוגמה פשוטה כדי להבין מהו הניואנס החשוב שאנחנו רוצים להתמקד בו: מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) x = x$$

לכל x , אבל כדי שיתקיים

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n} \right) x - x \right| < \epsilon, \quad \forall n > N$$

צריך להתקיים $N \geq \frac{|x|}{\epsilon}$. יש כזה N לכל x , אבל אין אחד שמתאים **בו-זמנית לכל ה- x** .

אפשר לחשוב על ה- N המינימלי עבור x נתון כמודד קצב התכנסות: ככל ש- $N(x, \epsilon)$ גדול יותר, סימן שהסדרה מתכנסת לאט יותר.

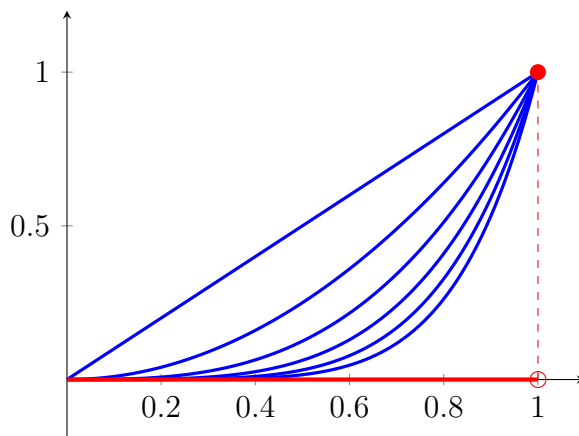
גיאומטרית, זה לא בדיוק נכון לחשוב על סדרת הגרפים של $f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n} \right) x$ כמתכנסים אל הגרף של $f(x) = x$.

הגדרה: תהי $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות שמוגדרות בקבוצה $I \subset \mathbb{R}$ ותהי $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. נאמר שהסדרה מתכנסת נקודתית לפונקציה הגבולית f ב- I אם לכל $x \in I$ מתקיים ש-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

כלומר, לכל $x \in I$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

דוגמה: דוגמה קלאסית של סדרה מתכנסת נקודתית של פונקציות היא הסדרה הפשוטה $f_n(x) = x^n$ בקטע $[0, 1]$. כלומר, $x, x^2, x^3, \dots$.



לכל $0 \leq x < 1$ קבוע מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, ועבור $x = 1$ הגבול הוא 1. לכן יש התכנסות נקודתית לפונקציה הגבולית

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

יש כאן תופעה מרגיזה: סדרה של פונקציות רציפות מתכנסת נקודתית לפונקציה שאינה רציפה.

התכנסות במידה שווה

מתברר שהתכנסות נקודתית היא לא "חזקה" מספיק כדי לשמר רציפות, וכן תכונות נוספות שנדבר עליהן עוד מעט. נגדיר כעת סוג חזק יותר של התכנסות של סדרת פונקציות, שיפתור את רוב הבעיות.

הגדרה 1. תהי $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות שמוגדרות בקבוצה $I \subset \mathbb{R}$ ותהי $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. נאמר שהסדרה מתכנסת במידה שווה לפונקציה הגבולית f ב- I אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ ולכל $x \in I$ מתקיים ש-

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

ההגדרה מזכירה מאוד את הגדרת הגבול. ההבדל המהותי בין התכנסות נקודתית לבין התכנסות במידה שווה הוא שאותו N מתאים לכל ה- x ים ב- I . כלומר, $N(\varepsilon)$ במקום $N(\varepsilon, x)$. בפרט, נקבל מיד את המשפט הבא.

משפט 2: תהי $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות שמוגדרות בקבוצה $I \subset \mathbb{R}$ ותהי $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

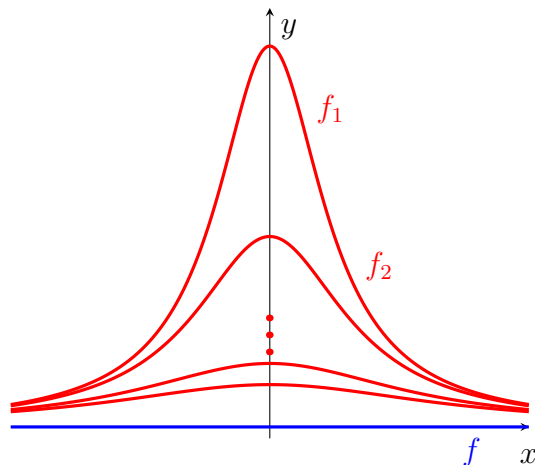
אם $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ מתקיים כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

כלומר, התכנסות במ"ש גוררת התכנסות נקודתית והפונקציה הגבולית זהה.

דוגמאות בסיסיות של בדיקת התכנסות במידה שווה

דוגמאות:

1. האם סדרת הפונקציות $f_n(x) = \frac{1}{x^2+n}$ מתכנסת במידה שווה בכל $\mathbb{R}$?



קשה לבדוק את זה "מתוך ריק" כי אין לנו מועמדת לפונקציה גבולית. אבל בעצם יש: אם (f_n) מתכנסת במידה שווה, אז היא מתכנסת נקודתית ולאותה הפונקציה הגבולית. הגבול הנקודתי קל לחישוב לפי טכניקות מוכרות: עבור $x \in \mathbb{R}$ קבוע,

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2+n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 =: f(x)$$

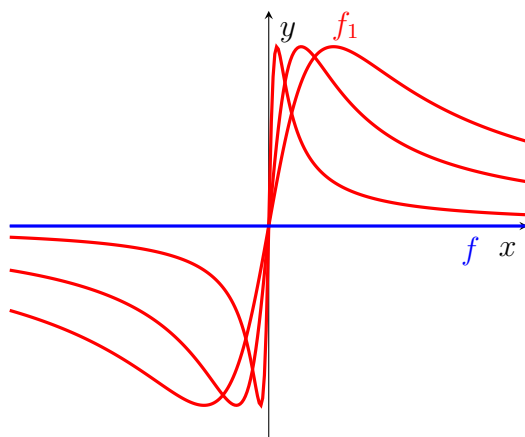
לכן המועמדת היא $f(x) \equiv 0$.

יהי $\epsilon > 0$. נעריך: לכל $x \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{x^2+n} \leq \frac{1}{n}$$

זה קטן מ- ϵ אם $n > \frac{1}{\epsilon}$, ולכן אפשר לבחור $N = \frac{1}{\epsilon}$. כלומר, $\frac{1}{x^2+n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{במ"ש}} 0$.

2. האם סדרת הפונקציות $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ מתכנסת במידה שווה בכל $\mathbb{R}$?



בדומה לקודם, נמצא מועמדת לפונקציה גבולית בעזרת התכנסות נקודתית:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

נסמן $f(x) \equiv 0$ שוב

האם יש התכנסות במידה שווה? לכל n , $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. לכן אין.

למה זה אומר שאין, ואיך נדע לאתר את הנקודה $\frac{1}{n}$ במצבים דומים? נבין את התשובה לשאלה השניה בפסקאות הקרובות. לגבי השאלה הראשונה, אין התכנסות במידה שווה כי עבור $\epsilon_0 = 0.1$ מתקיים לכל n ש- $|f_n(x) - f(x)| > \epsilon_0$, כאשר $x = \frac{1}{n}$.

נכון, x למעלה תלוי ב- n . אבל זה בסדר, כי לפי ההגדרה של התכנסות במידה שווה, התנאי צריך להתקיים לכל x בו זמנית עבור $n > N$.

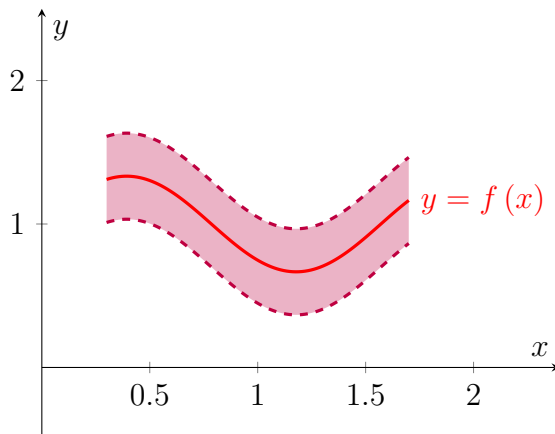
הערות:

- כלל אצבע בהוכחות של התכנסות במידה שווה: צריך להיפטר לגמרי מהמשתנה x בהערכות על $|f_n(x) - f(x)|$.
- אם יש התכנסות נקודתית ואין התכנסות במידה שווה, אז ה- x בשלילת ההגדרה של התכנסות במידה שווה יהיה תלוי ב- n .
- כלומר, לא רק שמותר ש- x יהיה תלוי ב- n בשלילה ההגדרה של התכנסות במידה שווה, אלא אין ברירה אחרת.

1.2 תנאי ה- M להתכנסות

תנאי ה- M להתכנסות

המשמעות הגרפית של $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ לכל x (כאשר n קבוע) היא שהגרף של $f_n(x)$ לא חורג מהגרף של $f(x)$ ביותר מ- ϵ . לכן הגרף של $f_n(x)$ מוכל כולו ב"שרוול" (נקניקיה) ברדיוס ϵ סביב הגרף של $f(x)$.



בהינתן זוג פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ שמוגדרות ב- I , המספר

$$d(f, g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$$

משמש לעיתים כמדד למרחק בין הפונקציות ("ה- Δy הגדול ביותר", אם כי זה אולי רק סופרמום וכן לא חייב להיות סופי). נעיר שאם $|f - g|$ לא חסומה ב- I , הכוונה היא $d(f, g) = \infty$.

מדד המרחק הזה מתאים בדיוק להתכנסות במידה שווה:

משפט 3. תהי $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות שמוגדרות בקבוצה I , ותהי $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. לכל n נגדיר

$$M_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$$

$$M_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ אם ורק אם } f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{במ"ש}} f$$

$$\text{כלומר, } f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{במ"ש}} f \text{ ב-} I \text{ אם ורק אם } \sup_I |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

נעיר שיתכן כי $M_n = \infty$ ולכן הכוונה בתנאי $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$ היא שהערך M_n אינו ∞ החל ממוקם מסוים, וכן $M_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

דוגמאות לשימוש בתנאי ה- M להתכנסות

דוגמה: עבור $f_n(x) = x^n$, ראינו ש- $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{נקודתי}} f(x)$ כאשר $f(x) = 0$ לכל $x \in [0, 1)$ ו- $f(1) = 1$. אבל

$$M_n \geq \sup_{x \in [0, 1)} x^n \equiv 1$$

כלומר, אין התכנסות במ"ש.

נשים לב שמאותה סיבה, עם אותו חישוב, אין גם התכנסות במידה שווה בקטע $[0, 1)$. הבעיה אינה בנקודה $x = 1$, אלא דווקא בנקודות $x < 1$ שקרובות ל-1. עבור אינסוף הנקודות הללו, אין קצב התכנסות אחיד.

כדי לחשב את M_n , חוקרים את $f_n(x) - f(x)$.

דוגמה: בדוגמה עם $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, שבה $f(x) \equiv 0$, קל לבדוק שמתקיים כי $f'_n(x) \geq 0$ עבור $0 < x < \frac{1}{n}$ וכן $f'_n(x) \leq 0$ עבור $x > \frac{1}{n}$. לכן $M_n = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ אינו שואף לאפס.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. מושג האינטגרליות לפי רימן והקשר שלו לרציפות.
2. תכונות של אינטגרל רימן (אי שוויון המשולש האינטגרלי, משפט ההערכה).
3. המשמעות של טור מספרים מתכנס וסכומו.
4. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ מתכנס אם ורק אם $p > 1$.
5. המושג "טור מתכנס בהחלט" ואי שוויון המשולש המתאים.

“An old joke notes that lost items tend to be in the last place one looks. Conversely, omens tend to appear in the first place people look for them.”

”

Brandon Sanderson, Yumi and the Nightmare Painter