

הרצאה 23: אינטגרל מוכלל, טורי מספרים

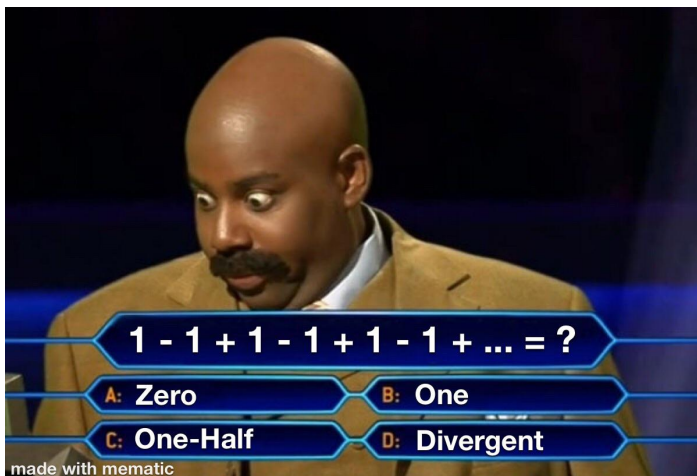
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1 אינטגרל מוכלל (המשך)
2	1.1 מבחני התכנסות עבור אינטגרנד אי-שלילי (המשך)
3	1.2 אינטגרנד כללי
5	2 טורי מספרים ומבחני התכנסות לטור חיובי
5	2.1 טור, סכומים חלקיים וסכום הטור



1 | אינטגרל מוכלל (המשך)

1.1 מבחני התכנסות עבור אינטגרנד אי-שלילי (המשך)

מבחן ההשוואה הגבולי

המשפט הבא בונה על משפט ההשוואה, ומספק כלי מחוכם יותר להשוואת התכנסויות של אינטגרלים מוכללים. הוא מכונה **מבחן ההשוואה הגבולי לאינטגרנדים אי-שליליים**.

משפט 1.1

- נניח כי f, g מוגדרות ואי-שליליות לכל $x \in [a, \infty)$ ואינטגרביליות בקטע $[a, x]$ לכל $x > a$. אם $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ קיים במובן הרחב, אז:
 - אם $L < \infty$, אז $\int_a^\infty f < \infty \Leftrightarrow \int_a^\infty g < \infty$
 - אם $L > 0$, אז $\int_a^\infty g < \infty \Leftrightarrow \int_a^\infty f < \infty$
 - נניח כי f, g מוגדרות ואי-שליליות לכל $x \in (a, b]$ ואינטגרביליות בקטע $[x, b]$ לכל $a < x < b$. אם $L = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ קיים במובן הרחב, אז:
 - אם $L < \infty$, אז $\int_a^b f < \infty \Leftrightarrow \int_a^b g < \infty$
 - אם $L > 0$, אז $\int_a^b g < \infty \Leftrightarrow \int_a^b f < \infty$
- לכן בשני המקרים, אם $0 < L < \infty$ אז שני האינטגרלים המוכללים מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

דוגמה: נבדוק אם האינטגרל $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-x^3}}$ מתכנס.

יש כאן שתי נקודות סינגולריות: $x=0$ ו- $x=1$. לכן נפריד את האינטגרל:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-x^3}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-x^3}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-x^3}}$$

האינטגרל מתכנס אם ורק אם שני האינטגרלים המוכללים באגף ימין מתכנסים.

מתקיים: $\frac{1}{\sqrt{x^2-x^3}} = \frac{1}{x\sqrt{1-x}}$ ולכן קל לנחש למה להשוות עבור $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2-x^3}}}{\frac{1}{x}} = 1$$

הפונקציות $\frac{1}{x}$ ו- $\frac{1}{\sqrt{x^2-x^3}}$ אי-שליליות ולכן האינטגרלים מתכנסים ומתבדרים יחדיו. לכן האינטגרל מתבדר ובכך סיימנו – זה לא משנה מה קורה עם האינטגרל השני.

כדי לספק את הסקרנות, עבור האינטגרל השני אפשר לבצע השוואה גבולית מתבקשת כזו:

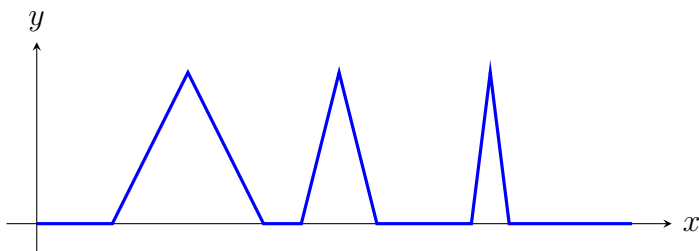
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2-x^3}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = 1$$

אלו שוב שתי פונקציות אי-שליליות ולכן $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-x^3}}$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו. קל לבדוק שהאינטגרל המוכלל הפשוט יותר האחרון מתכנס.

פונקציית האוהלים

לפעמים נוצר הרושם השגוי שאם $\int_a^\infty f(x) dx$ מתכנס, אז בהכרח $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$. זה לא דווקא קורה. אבל מה אם ידוע ש- $f(x) \geq 0$?

דוגמה: הפונקציה $f(x)$ שמכונה **פונקציית האוהלים** מוגדרת באופן הבא על הקרן $[0, \infty)$: סביב כל $x = n$ שלם, מציירים משולש שווה-שוקיים עם גובה 1 ורוחב בסיס $\frac{1}{2^{n-1}}$. זה הגרף של $f(x)$ (ואחרת $f(x) = 0$).



היות שהיא אי-שלילית, $F(x) = \int_0^x f$ עולה. בנוסף,

$$F\left(n + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \int_0^{n + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}} f = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{\frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

לכן $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ קיים, ובמילים אחרות האינטגרל $\int_1^\infty f(x) dx$ מתכנס. אבל $f(x)$ לא שואפת לאפס: $f(n) = 1$ לכל n .

אפשר לשאול האם בהכרח $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ אם ידוע בנוסף ש- $f(x) > 0$; או ש- $f(x)$ מונוטונית. שאלות אלו יופיעו כתרגילי בית.

1.2 אינטגרנד כללי

התכנסות בהחלט

בסעיף זה נכיר תנאי חשוב ושימושי להתכנסות. המוטיבציה אליו היא שראינו מבחני התכנסות עבור אינטגרנד אי-שלילי, ולכן בהינתן אינטגרנד כללי, יש טעם לנסות להחליף אותו באי-שלילי. ואכן, נראה שכדי לבדוק אם $\int_a^b f$ מתכנס, יספיק לבדוק ש- $\int_a^b |f| < \infty$ (כמובן בתנאי ש- $f(x)$ מקיימת תנאים בסיסיים מקדימים).

הגדרה 2.

1. תהי $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרלית בקטע $[a, x]$ לכל $x > a$. נאמר שהאינטגרל $\int_a^\infty f$ מתכנס בהחלט אם $\int_a^\infty |f| < \infty$.
2. תהי $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרלית בקטע $[x, b]$ לכל $a < x < b$. נאמר שהאינטגרל $\int_a^b f$ מתכנס בהחלט אם $\int_a^b |f| < \infty$.
3. באופן כללי, נאמר כי $\int_I f$ מתכנס בהחלט אם לאחר פיצול, כל מחובר מתכנס בהחלט.

משפט 3. אם אינטגרל מוכלל מתכנס בהחלט, אז הוא מתכנס. בנוסף, במקרה זה מתקיים אי שוויון המשולש האינטגרלי

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$$

כרגיל, התכנסות בהחלט וההוכחה שהיא משליכה על התכנסות אנלוגיים עבור כל סוג של אינטגרל מוכלל עם סינגולריות אחת בדיוק. מומלץ (שוב כרגיל) לכתוב את אלו לבד.

דוגמאות והתכנסות בתנאי

דוגמאות:

1. האם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ מתכנס?

האינטגרנד לא חיובי ולכן מבחני ההשוואה לא עומדים לרשותנו באופן ישיר.

מצד שני, $0 \leq \frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$, לכל $x \geq 1$, ו- $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} < \infty$. לכן לפי מבחן ההשוואה, $\int_1^\infty \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx < \infty$.

זה אומר ש- $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ מתכנס בהחלט, ולכן לפי המשפט - הוא מתכנס!

2. האם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ מתכנס?

האינטגרנד שוב לא חיובי ולכן זה מתבקש לבדוק אם הוא מתכנס בהחלט. לצערנו, הפעם לא:

לכל x מתקיים ש- $|\sin x| \geq \sin^2 x$, ולכן

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos(2x)}{2x} \geq 0$$

ראינו כבר ש- $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ מתבדר, ונראה עוד מעט ש- $\int_1^\infty \frac{\cos(2x)}{x} dx$ מתכנס. לכן $\int_1^\infty \frac{1 - \cos(2x)}{2x} dx$ מתבדר, ולכן לפי מבחן ההשוואה גם $\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ מתבדר.

כלומר, $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ לא מתכנס בהחלט. האם זה בהכרח אומר שהוא לא מתכנס? לא לפי המשפט, אבל אולי אפשר לחזק את המשפט.

מתברר שאי-אפשר, והאינטגרל $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ דווקא מתכנס. נוכיח שהגבול $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{\sin x}{x} dx$ קיים.

לפי אינטגרציה בחלקים עם $u = \frac{1}{x}$ ו- $v' = \sin x$,

$$\int_1^M \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x} \Big|_1^M - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2} dx = \cos 1 - \frac{\cos M}{M} - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2} dx$$

לפי חסומה כפול שואפת לאפס, $\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\cos M}{M} = 0$. לפי הדוגמה הראשונה, הגבול $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{\cos x}{x^2} dx$ קיים. לכן לפי אריתמטיקה של גבולות,

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{\sin x}{x} dx = \cos 1 - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$$

באותו אופן ניתן להוכיח כי $\int_1^\infty \frac{\cos(2x)}{x} dx$ מתכנס.

הגדרה: נאמר שאינטגרל מוכלל מתכנס בתנאי אם הוא מתכנס אבל לא מתכנס בהחלט.

באופן כללי, אינטגרלים מוכללים שמתכנסים בתנאי הם פחות שימושיים והרבה פעמים חושבים עליהם בתור אינטגרלים שמתכנסים "במקרה", בניגוד לאינטגרלים מוכללים שמתכנסים בהחלט.

2 | טורי מספרים ומבחני התכנסות לטור חיובי

2.1 טור, סכומים חלקיים וסכום הטור

טור מספרים

בפרק הזה נדבר על טורי מספרים. בשלב זה של החיים, השאלה כבר אמורה לבעור: האם אפשר להגדיר סכום של אינסוף מספרים,

$$a_1 + a_2 + \dots$$

באופן קונסיסטנטי?

כפי שנראה, התשובה חיובית. למעשה, רובכם כבר נתקלתם בדוגמה אחת כזו: טור הנדסי אינסופי מתכנס, כמו למשל

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 1$$

מטרתנו לבסס מסגרת מתמטית שבתוכה יש לנ"ל הגיון פנימי, והוא רק דוגמה אחת מני רבות.

בהינתן סדרת מספרים $(a_n)_{n=1}^\infty$, לביטוי $\sum_{n=1}^\infty a_n$ קוראים **טור מספרים**. למשל, $\sum_{n=1}^\infty 1$ או $\sum_{n=1}^\infty n$. לטור מספרים אין משמעות בשלב זה: הוא לא מספר; אי-אפשר לחבר שני טורי מספרים או לכפול טור מספרים ב-2; וכו'. זה רק "ציור".

הערה: אין שום חשיבות לכך שהאינדקס הראשון הוא $n = 1$. לפעמים זה יהיה $n = 2$, $n = 0$ או אפילו $n = -3$.

דוגמאות:

1. הטור ההרמוני

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right)$$

נזכיר - כרגע, זהו ביטוי חסר משמעות. מיד ננסה להבין אם אפשר להעניק משמעות שמתקבלת על הדעת.

2. הטור $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$, כלומר: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

3. **טור הנדסי:** למשל, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$, או באופן כללי יותר $1 + q + q^2 + q^3 + \dots$. בכתיב מדויק, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

4. **הטור המתחלף:** $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$, כלומר: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$. אפשר לומר שזהו מקרה פרטי של טור הנדסי עם $q = -1$.

5. אפשר לכתוב כל טור שרוצים. למשל,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots\right)$$

6. טור מטופש: $1 + 1 + 1 + \dots$.

7. טור עוד יותר מטופש: $1 + 2 + 3 + \dots$.

סכומים חלקיים

הגדרה: יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מספרים. הסכום החלקי ה- n -י של הטור הוא המספר

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

הסדרה $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ מכונה **סדרת הסכומים החלקיים**.

כפי שנראה, רוב מה שנגיד על טור מספרים - בעצם נתכוון לסדרת הסכומים החלקיים.

דוגמאות:

1. עבור הטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$,

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

אפשר לכתוב כמה איברים ראשונים בסדרת הסכומים החלקיים:

$$s_1 = 1, \quad s_2 = \frac{3}{2}, \quad s_3 = \frac{11}{6}, \quad \dots$$

אבל אין נוסחה פשוטה עבור s_n .

2. עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

גם כאן, כמו תמיד, אפשר לכתוב כמה איברים ראשונים:

$$s_1 = 1, \quad s_2 = \frac{5}{4}, \quad s_3 = \frac{49}{36}, \quad \dots$$

שוב אין נוסחה פשוטה עבור s_n .

זו תהיה תופעה מאוד נפוצה. חוץ מאשר בדוגמאות מאוד פשוטות, לא תהיה נוסחה פשוטה עבור s_n .

3. עבור הטור ההנדסי $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, הסכום החלקי הוא סכום של מספר סופי מאיברי סדרה הנדסית ולכן יש נוסחה מוכרת:

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

נעיר שמכיוון שהסכום מתחיל מ- $n=0$, יש $n+1$ מחוברים ב- s_n . בנוסף, השוויון הנ"ל נכון כל עוד $q \neq 1$. אם $q = 1$, $s_n = n + 1$.

4. עבור הטור המתחלף $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$, נכתוב כמה איברים ראשונים בסדרת הסכומים החלקיים:

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1 - 1 = 0, \quad s_3 = 1 - 1 + 1 = 1, \quad s_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0, \quad \dots$$

החוקיות ברורה: $s_n = 1$ אם n אי-זוגי ו- $s_n = 0$ אם n זוגי.

5. עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ יש טריק שמאפשר לחשב את s_n :

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

כי מדובר בסכום טלסקופי.

6. עבור הטור $1 + 1 + 1 + \dots$ (גם מקרה פרטי של טור הנדסי), $s_n = n$.

7. עבור הטור $1 + 2 + 3 + \dots$, לפי הנוסחה לסכום מספר סופי מאיברי סדרה חשבונית: $s_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

סכום הטור

אז מה זה סכום של אינסוף מספרים? איזו משמעות מספרית נעניק לטור, ולאלו טורים? התשובה היא: לפי סדרת הסכומים החלקיים. ובמדויק:

הגדרה 4. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מספרים. נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת. במקרה כזה, הגבול $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ מכונה סכום הטור ונעניק לטור את המשמעות:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

אחרת, נאמר שהטור מתבדר.

הערה: אם $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm\infty$ עדיין נכתוב $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$, אבל נאמר שהטור מתבדר וחסר משמעות מספרית.

כפי שראינו, בדרך כלל לא תהיה לנו נוסחה פשוטה עבור s_n . לכן בדיקה של התכנסות הטור יכולה להיות משימה קשה; שלא לדבר על מציאת סכום הטור.

דוגמאות:

1. עבור הטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, אין נוסחה פשוטה עבור s_n ולכן בשלב זה קשה לבדוק אם הטור מתכנס.

2. עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, אין נוסחה פשוטה עבור s_n ולכן בשלב זה קשה לבדוק אם הטור מתכנס.

3. עבור הטור ההנדסי $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, ראינו שעבור $q \neq 1$ מתקיים $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. לכן אם $|q| < 1$ אז $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-q}$, ואם $|q| > 1$ או $q = -1$ אז הגבול לא קיים. אם $q = 1$ אז $s_n = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ ולכן הטור שוב מתבדר. לסיכום,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1$$

4. עבור הטור המתחלף $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$, סדרת הסכומים החלקיים היא $1, 0, 1, 0, 1, \dots$ ולכן הטור מתבדר.

5. עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, ראינו כי $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. לכן הטור מתכנס וסכומו $s = 1$ כלומר:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots$$

6. עבור הטור $1 + 1 + 1 + \dots$, $s_n = n$ ולכן הטור מתבדר.

7. עבור הטור $1 + 2 + 3 + \dots$, $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ולכן הטור מתבדר (לא להאמין לכל מה שרואים באינטרנט).