

הרצאה 18: פולינום טיילור ומשפטי טיילור

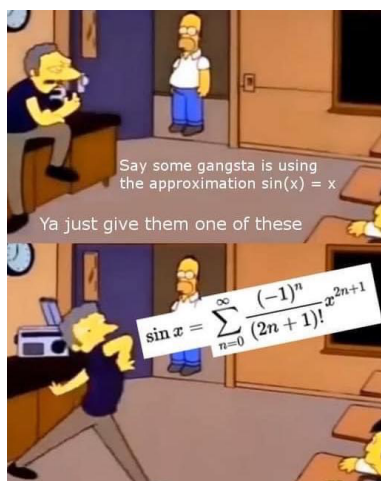
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1	משפטי טיילור
2	1.1	פולינום טיילור
5	1.2	משפט טיילור עבור סדר גודל של השארית
5	1.3	משפט טיילור עבור השארית בצורת לגרנז'



משפטי טיילור | 1

1.1 פולינום טיילור

המשיק כקירוב לינארי וקירוב ממעלה גבוהה יותר

אם f גזירה בנקודה x_0 אז המשיק הוא הגרף של פונקציה שמהווה קירוב לינארי של f ליד x_0 . ליתר דיוק,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)$$

כאשר $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$. הפונקציה $r(x)$ מכונה **השארית** או לפעמים השגיאה בקירוב, ותכונת הקירוב הלינארי (דהיינו, תכונת הגזירות) היא: $r(x) = o(x - x_0)$.

פולינום טיילור יהיה קירוב ממעלה 2 או 3 באופן כללי, n . אנחנו נכליל את התכונה הפשוטה של המשיק: זהו פולינום $t_1(x)$ ממעלה 1 שמקיים

$$\begin{cases} f(x_0) = t_1(x_0) \\ f'(x_0) = t_1'(x_0) \end{cases}$$

למשל, עבור $n = 2$ נרצה: $f(x) = t_2(x) + r_2(x)$ כאשר $t_2(x)$ פולינום ממעלה 2 והשארית מקיימת $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_2(x)}{(x - x_0)^2} = 0$, ובאותו אופן עבור n כללי. ננסה להשיג את זה על ידי בחירת של $t_n(x)$ שמקיים את התכונה הנ"ל באופן שמתאים למעלה n :

$$f^{(k)}(x_0) = t_n^{(k)}(x_0), \quad k = 0, \dots, n$$

נעיר שלכל $k > n$ מתקיים עבור פולינום ממעלה n ש- $t^{(k)}(x) \equiv 0$ ולכן לא סביר לכוון ששוויון כזה יתקיים עבור $k > n$.

ייצוג של פולינום בחזקות של $x - x_0$ והקשר בין המקדמים לבין הנגזרות בנקודה x_0

פולינום ממעלה n נכתב בדרך כלל כ- $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, אבל ניתן להציג אותו גם כ-

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_0 = a_n (x - x_0 + x_0)^n + \dots + a_0 = b_n (x - x_0)^n + \dots + b_0$$

אפשר להשתמש בנגזרת כדי לחשב את המקדמים החדשים b_k ללא חישובים אלגבריים מתישים:

$$\text{משפט 1: אם } p(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x - x_0)^k \text{ אז לכל } 0 \leq k \leq n \text{ מתקיים כי } b_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

דוגמה: נכתוב את הפולינום $x^3 + 2x^2 - x - 3$ באמצעות חזקות של $x - 1$. נחשב

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 3 & \Rightarrow b_0 = -1 \\ f'(x) = 3x^2 + 4x - 1 & \Rightarrow b_1 = 6 \\ f''(x) = 6x + 4 & \Rightarrow b_2 = 5 \\ f'''(x) = 6 & \Rightarrow b_3 = 1 \end{cases}$$

לכן מתקבל $(x - 1)^3 + 5(x - 1)^2 + 6(x - 1) - 1$.

הגדרה של פולינום טיילור ודוגמאות

הגדרה 2. תהי f גזירה n פעמים בנקודה x_0 . פולינום טיילור מסדר n של f סביב הנקודה x_0 הוא הפולינום

$$.t_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

כלומר, זהו הפולינום היחיד ממעלה n שמקיים כי לכל $0 \leq k \leq n$ הנגזרת בנקודה x_0 תואמת לפונקציה: $f^{(k)}(x_0) = t_n^{(k)}(x_0)$.

רוב הדוגמאות שנראה יהיו עבור $x_0 = 0$. אין שום דבר מיוחד בנקודה $x_0 = 0$ חוץ מזה שהביטויים נראים פחות ארוכים: במקום $(x - x_0)^k$ פולינום טיילור סביב הנקודה $x_0 = 0$ מכונה **פולינום מקלורן**.

דוגמה: נחשב את פולינום מקלורן של $f(x) = \frac{1}{1-x}$. זה בעצם אומר לחשב את $f^{(k)}(0)$, ובכך,

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow f'(0) = 1 \\ f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \Rightarrow f''(0) = 2 \\ f'''(x) = \frac{2 \cdot 3}{(1-x)^4} \Rightarrow f'''(0) = 6 \end{cases}$$

לכן למשל:

$$\begin{cases} t_0(x) = 1 \\ t_1(x) = 1 + x \\ t_2(x) = 1 + x + \frac{2}{2}x^2 = 1 + x + x^2 \end{cases}$$

באופן כללי, $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ ולכן $f^{(k)}(0) = k!$ לכן

$$.t_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{k!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + \dots + x^n$$

עוד דוגמאות של פולינומי טיילור

דוגמאות:

1. נחשב את פולינום מקלורן של $g(x) = \ln(1-x)$. נשים לב שמתקיים

$$.g'(x) = -\frac{1}{1-x} = -f(x)$$

לכן חוץ מ- $g(0) = \ln(1-0) = 0$, כבר חישבנו את כל הנגזרות האחרות בדוגמה קודמת:

$$\begin{cases} g'(x) = -f(x) \Rightarrow g'(0) = -f(0) = -1 \\ g''(x) = -f'(x) \Rightarrow g''(0) = -f'(0) = -1 \end{cases}$$

וכן הלאה. באופן כללי, $g^{(k)}(0) = -f^{(k-1)}(0) = -(k-1)!$, לכל $k \geq 1$. כלומר,

$$t_n(x) = 0 + \sum_{k=1}^n -\frac{(k-1)!}{k!} x^k = -\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^n}{n}$$

באופן דומה, פולינום טיילור של $\ln(1+x)$ מסדר n הוא

$$t_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$$

2. נחשב את פולינום מקלורן של $h(x) = e^x$. זו דוגמה קלה כי $h^{(k)}(x) = e^x$ לכל k ולכן $h^{(k)}(0) = 1$ תמיד. לכן

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

פולינום טיילור של $\sin x$ ושל $\cos x$

נחשב את פולינום מקלורן של $s(x) = \sin x$. נחשב נגזרות:

$$\begin{cases} s(x) = \sin x \Rightarrow s(0) = 0 \\ s'(x) = \cos x \Rightarrow s'(0) = 1 \\ s''(x) = -\sin x \Rightarrow s''(0) = 0 \\ s'''(x) = -\cos x \Rightarrow s'''(0) = -1 \end{cases}$$

לאחר מכן חוזרים להתחלה: $s^{(4)}(x) = \sin x = s(x)$ ולכן יש מחזוריות בערכי הנגזרת. מקבלים כי $s^{(k)}(0) = 0$ לכל k זוגי, ו- $s^{(k)}(0) = \pm 1$ כאשר k אי-זוגי. יתר על כן, אם נכתוב $k = 2m - 1$ במקרה האי-זוגי, אז עבור $m = 1$ (שזה $k = 1$) קיבלנו $+1$, עבור $m = 2$ (שזה $k = 3$) קיבלנו -1 , וכן הלאה. כלומר, $f^{(2m-1)}(0) = (-1)^{m+1}$. בסך הכל:

$$\begin{cases} t_0(x) = \frac{0}{0!} x^0 = 0 \\ t_1(x) = 0 + \frac{1}{1!} x^1 = x \\ t_2(x) = x + \frac{0}{2!} x^2 = x \\ t_3(x) = x + \frac{-1}{3!} x^3 = x - \frac{x^3}{3!} \end{cases}$$

באופן כללי נקבל:

$$t_{2m}(x) = t_{2m-1}(x) = \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}$$

באופן דומה, פולינומי טיילור של $\cos x$ הם

$$t_{2m+1}(x) = t_{2m}(x) = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

1.2 משפט טיילור עבור סדר גודל של השארית

המשפט והוכחתו

המשפט הבא מראה שהנסיון אכן הצליח, ופולינום טיילור מקיימת את התכונה שקיוונו לה.

משפט 3. תהי f גזירה n פעמים בנקודה x_0 . אז

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - t_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

נהוג להשתמש בסימון $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$. זה מכונה **צורת פיאנו** של השארית.

נוכיח אותו במקרה $n = 2$.

שימוש לחישוב גבולות

משפט טיילור עבור השארית בצורת פיאנו הוא שימושי מאוד לחישובי גבולות בסגנון לופיטל. אם רוצים לחשב $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ אז משתמשים בפיתוחי טיילור של המונה והמכנה, כאשר בוחרים את סדרי הפיתוח כך שהפולינום אינו סתם 0.

דוגמה: נחשב את $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$. במקרה זה המכנה הוא כבר פולינום והמונה בחלקו גם פולינום, אז נקל על עצמנו קצת ורק נבחר פיתוח של $\sin x$ שמשאר משהו שאינו רק השארית במונה:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + r_5(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_5(x)}{x^5} = 0$$

נקבל:

$$\begin{aligned} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + r_5(x) - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} \\ &= \frac{\frac{x^5}{120} + r_5(x)}{x^5} = \frac{1}{120} + \frac{r_5(x)}{x^5} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{120} + 0 = \frac{1}{120} \end{aligned}$$

1.3 משפט טיילור עבור השארית בצורת לגרנז'

ניסוח משפט טיילור עבור השארית בצורת לגרנז'

בהינתן פונקציה f שגזירה n פעמים בנקודה x_0 , אנחנו רוצים להבין את טיב הקירוב (אם בכלל) של f על ידי t_n . כלומר, אנחנו רוצים להבין את $r_n(x) = f(x) - t_n(x)$.

משפט 4. תהי f רציפה בקטע $[x_0, x]$ וגזירה $n + 1$ פעמים בקטע $[x_0, x]$. אז קיים $c \in (x_0, x)$ כך שמתקיים

$$r_n(x) = f(x) - t_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

הערות:

- אין הכרח שהנקודה x תהיה מימין ל- x_0 . כלומר, המשפט תקף גם בקטע מהצורה $[x, x_0]$ (ואז $c \in (x, x_0)$).
- בעצם, אין צורך ש- f תהיה גזירה $n + 1$ פעמים בנקודה x_0 עצמה, אלא מספיק ש- $f^{(n)}$ תהיה קיימת ורציפה בה מימין.
- המקרה $n = 0$ הוא בדיוק משפט לגרנז':

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$$

כלומר, זו הכללה של משפט לגרנז'.

- חשוב לשים לב שהנקודה c תלויה ב- f, x_0, x, n .

פיתוח טיילור ודוגמאות

אם f גזירה n פעמים בנקודה x_0 , השוויון

$$f(x) = t_n(x) + r_n(x)$$

מכונה **פיתוח טיילור** של f מסדר n סביב x_0 . ראינו שאם f גזירה $n + 1$ פעמים בסביבת x_0 אז לכל x בסביבה זו קיימת c בין x_0 לבין x (שתלויה ב- x_0, x, n) כך ש- $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$. לכן במקרה זה אפשר לכתוב מחדש את פיתוח טיילור כך:

$$f(x) = t_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

אבל גם אם לא ידוע ש- f גזירה $n + 1$ פעמים בסביבה של $x = x_0$, עדיין ניתן לכתוב את פיתוח טיילור והוא יכול להיות שימושי.

דוגמאות:

1. משפט טיילור מאפשר לחשב בקירוב מספרים שלא ניתן לחשב בדיוק על ידי פעולות אריתמטיות. נדגים למשל חישוב של e עד שתי ספרות אחרי הנקודה. ליתר דיוק, נחשב את e עד כדי טעות של $\frac{1}{1000}$ ונדון בסוף במשמעות לגבי הפיתוח העשרוני.

ובכן, נסמן $f(x) = e^x$ ונרצה לחשב את $f(1)$. לצורך כך נשתמש בפיתוח טיילור סביב $x_0 = 0$ (כי בנקודה זו אנו יודעים לחשב את f ואת כל נגזרותיה בדיוק) ויחד עם $x = 1$, נמצא n כך שמתקיים $|r_n(1)| < 0.001$.

ראשית נזכיר כי $f^{(k)}(x) = e^x$ לכל k ולכן השארית בצורת לגרנז' בפיתוח מסדר n מקיימת

$$r_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot (1-0)^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!}$$

עבור איזשהו $0 < c < 1$ שאינו ידוע. בכל זאת, לפי מונוטוניות: $e^c < e < 3$ ולכן $0 < r_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$. לכן מספיק לבחור n כך ש- $\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{1000}$, כלומר, $(n+1)! > 3000$. ה- n הנמוך ביותר שמקיים את התנאי הזה הוא $n = 6$ היות ש- $7! = 5040 > 3000$ ולכן נחשב:

$$e = t_6(1) + r_6(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{6!} + r_6(1) = 2 + \frac{517}{720} + r_6(1) = 2.71805555 \dots + r_6(1)$$

היות ש- $0 < r_6(1) < 0.001$, אפשר להסיק ששתי הספרות הראשונות בפיתוח העשרוני של e הן אכן 2.71.

באופן דומה אפשר למשל לחשב את $\sqrt{5}$ בעזרת פיתוח טיילור של $\sqrt{x}$ סביב $x_0 = 4$.

2. לפי פיתוח מקלורן מסדר n של e^x נקבל שלכל $x > 0$ קיימת $0 < c < x$ כך ש-

$$e^x = t_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} > 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

באופן זה, משפט טיילור מאפשר להוכיח אי-שוויונים.

המספר e אינו רציונלי

המספר e אינו רציונלי כי לו היה $e = \frac{p}{q}$ אז $e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{e^c}{(n+1)!}$ ולכן

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{e}{(n+1)!}$$

נבחר $n > q$ ונכפול ב- $n!$ ונקבל $1 < \frac{e}{n+1} < \frac{n!}{q} - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} < 0$ מספר שלם בין 0 ל-1. זו סתירה.

בעיית השארית השואפת לאפס ודוגמה נגדית מפורסמת

שאלה טבעית וחשובה היא: האם ניתן לומר שמתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$? כלומר, האם עבור x קבוע מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n(x) = f(x)$?

ניתן לשאול את השאלה הזו רק כאשר f גזירה אינסוף פעמים בנקודה x_0 , על מנת ש- $t_n(x)$ יהיה מוגדר לכל n . כפי שמתברר, גם אם f גזירה אינסוף פעמים בכל $\mathbb{R}$, עדיין יתכן שפולינומי טיילור לא מתכנסים לערך הפונקציה.

דוגמה: הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

גזירה אינסוף פעמים בכל נקודה $x \neq 0$ בתור הרכבה, מנה וכו' של כאלה. נסו להוכיח בכל תרגיל (לא לגמרי קל, בעזרת כלל לופיטל): בנקודה $x = 0$ מתקיים לכל k כי $f^{(k)}(0) = 0$. כלומר, f גזירה אינסוף פעמים בכל $\mathbb{R}$ (מה שאומר אוטומטית שכל הנגזרות גם רציפות, ומסומן $(f \in C^\infty(\mathbb{R}))$).

לפיכך $t_n(x) \equiv 0$ לכל n , מה שאומר ש- $r_n(x) = f(x)$ תמיד. כלומר, לא מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ לאף $x \neq 0$.

המצב הזה של פולינומי טיילור שאינם מתכנסים לפונקציה הוא לא רצוי, ובזכות משפט טיילור עבור השארית בצורת לגרנז', נוכל לזהות מקרים מסוימים שבהם הכל בסדר והשארית שואפת לאפס. זהו המשפט השימושי הבא.

אם הנגזרות חסומות במשותף אז השארית שואפת לאפס כאשר n שואף לאינסוף

משפט 5. תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[x_0, x]$ וגזירה מכל סדר בקטע $[x_0, x)$. נניח שכל הנגזרות של f חסומות במשותף ב- $[x_0, x)$: קיים $M > 0$ כך שלכל $t \in [x_0, x)$ ולכל k מתקיים $|f^{(k)}(t)| \leq M$. אז $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$.

הערות:

- המשפט נכון גם במקרה $x < x_0$, עם הקטע $[x, x_0]$.
- בהוכחה, נקודת הביניים c תהיה בדרך כלל תלויה ב- n (וב- f, x, x_0). לכן היה יותר טוב לסמן אותה c_n . בהוכחה זו, זה לא משנה, אך במקרים אחרים זה יכול להיות חשוב.

דוגמאות:

1. המשפט תקף עבור פיתוח מקלורן של $f(x) = \sin x$ לכל $x \in \mathbb{R}$, עם $M = 1$. לכן $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ לכל x .

כנ"ל עם $\cos x$.

2. המשפט תקף עבור פיתוח מקלורן של $f(x) = e^x$ לכל $x \in \mathbb{R}$: אם $x > 0$ אפשר לבחור $M = e^x$, ואם $x < 0$ אפשר לבחור $M = 1$. לכן $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ לכל x .