

הרצאה 13: הגדרת הנגזרת

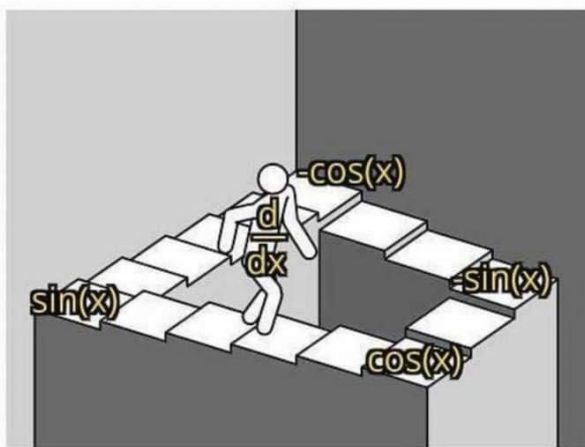
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1 הנגזרת
2	1.1 הגדרות ודוגמאות בסיסיות
6	1.2 רציפות ואריתמטיקה
6	1.3 כלל השרשרת



1 | הנגזרת

1.1 הגדרות ודוגמאות בסיסיות

הגדרה ומוטיבציה גיאומטרית ופיסיקלית

אם היה צריך להצביע על מילה אחת שמתארת את הקורס, היינו אומרים "הנגזרת". אנחנו רוצים להבין הכל על הנגזרת: הגדרתה והסיבות מאחוריה, ההתנהגות שלה, והשימושים שלה.

הרעיון מאחורי נגזרת של פונקציה f הוא פשוט ומצד שני היה מהפכני: היא מייצגת קצב שינוי רגעי של הפונקציה. אם נחשוב כרגיל במונחים של $y = y(x)$, אז קצב השינוי "הממוצע" מ- x_0 ל- x הוא $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. הנגזרת היא הגבול של הביטוי הזה כאשר $\Delta x \rightarrow 0$.

הגדרה 1. תהי f פונקציה במוגדרת בסביבה של הנקודה $x = x_0$. הנגזרת של f בנקודה x_0 מוגדרת על ידי

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

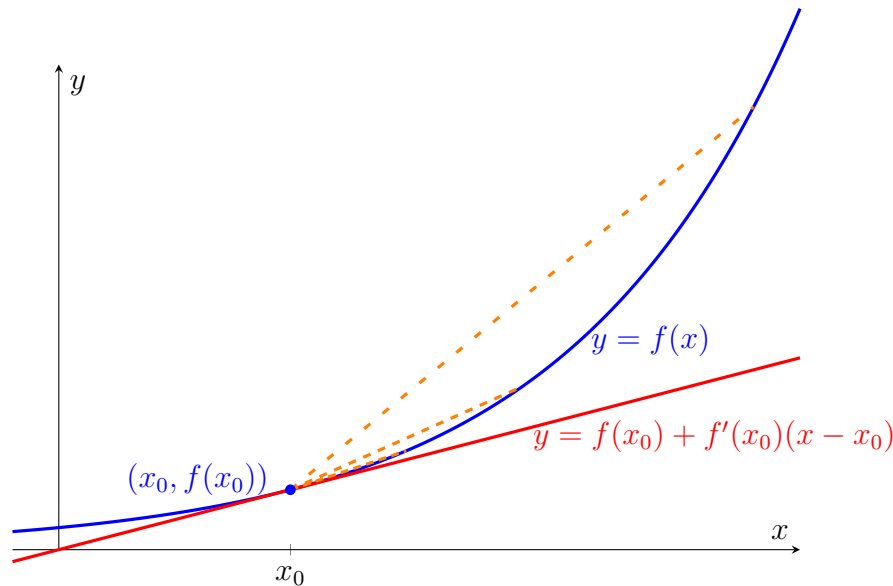
אם הגבול קיים.

נאמר ש- f גזירה בנקודה x_0 אם הנגזרת $f'(x_0)$ קיימת.

ניתן לפרש את המוטיבציה הנ"ל באופנים שונים. הנה שני פירושים חשובים.

אם חושבים על $x(t)$ כמיקום של חלקיק בזמן t , אז $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ מייצג את המהירות הממוצעת על פני טווח הזמנים Δt , ולכן הגבול $x'(t_0)$ הוא **המהירות הרגעית** של החלקיק בזמן $t = t_0$. כלומר, $v = x'$. באופן דומה, $a = v'$ היא **התאוצה הרגעית** של החלקיק בזמן $t = t_0$.

אם מציירים את הגרף $y = f(x)$ אז $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ הוא השיפוע של "מיתר" בין שתי נקודות על הגרף: $(x_0, f(x_0))$ ו- $(x, f(x))$. ככל ש- x מתקרב ל- x_0 , המיתר הזה הופך לקו משיק ולכן $f'(x_0)$ הוא שיפוע המשיק לגרף של f בנקודה $x = x_0$.



מסיבה זו המשיק נתון על ידי

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

דוגמאות פשוטות וייצוג אחר של הגדרת הנגזרת

דוגמאות:

1. נחשב את הנגזרת של $f(x) = x^2$ בנקודה כללית x_0 .

לפי ההגדרה,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

בקצרה כותבים $(x^2)' = 2x$.

נעיר שקיבלנו כי x^2 גזירה בכל נקודה.

2. דוגמה קלה יותר אבל בכל זאת חשובה, הנגזרת של פונקציה קבועה $f(x) \equiv c$ לכל נקודה x_0 מתקיים כי

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0$$

כלומר, $(c)' \equiv 0$.

לעיתים קרובות נוהגים יותר להציג את הגדרת הנגזרת באופן קצת אחר:

משפט 2: תהי f פונקציה במוגדרת בסביבה של הנקודה x . אז f גזירה בנקודה x אם ורק אם הגבול הבא קיים, ואז הוא שווה לנגזרת:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

כלומר, שני הגבולות הם שקולים אחד לשני: אחד קיים אם ורק אם השני קיים, ואם הם קיימים אז הם שווים.

כל חישוב של נגזרת הוא שימוש מעניין ולא טריוויאלי של מושג הגבול, היות שלא ניתן להציב את $x = x_0$ בתוך הביטוי $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ אבל הגבול כאשר $x \rightarrow x_0$ הוא בעל עניין וחשיבות.

דוגמה: נחשב את הנגזרת של $\sin x$ לפי ההגדרה:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2 \sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right) \cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)}{h} = \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1 \cdot \cos x$$

בשלב האחרון השתמשנו בגבולות הידועים $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ (יחד עם ההרכבה $t = \frac{h}{2}$) ו- $\lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x$ (רציפות של פונקציה אלמנטרית).

לסיום, $(\sin x)' = \cos x$ ובאופן דומה מתקבל כי $(\cos x)' = -\sin x$. בפרט, שתי הפונקציות $\sin x$ ו- $\cos x$ גזירות בכל נקודה.

נגזרות חד צדדיות

הגדרה:

1. תהי f מוגדרת בסביבה ימנית של הנקודה x_0 . הנגזרת הימנית של f בנקודה x_0 מוגדרת על ידי הגבול

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

אם הוא קיים.

2. תהי f מוגדרת בסביבה שמאלית של הנקודה x_0 . הנגזרת השמאלית של f בנקודה x_0 מוגדרת על ידי הגבול

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

אם הוא קיים.

באופן דומה להגדרת הנגזרת, ניתן לכתוב את הנגזרות החד-צדדיות גם באמצעות גבול לפי h :

$$f'_\pm(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

נקבל בנוסף מיד את המשפט הבא מתוך משפט על גבולות חד-צדדיים:

משפט 3: תהי f מוגדרת בסביבה של x_0 . אז גזירה בנקודה x_0 אם ורק אם הנגזרות החד-צדדיות של f בנקודה x_0 קיימות ושוות, ובמקרה זה מתקיים

$$f'(x_0) = f'_\pm(x_0)$$

דוגמה: נחשב את הנגזרת הימנית של $\sqrt{x}$ ב-0. לפי ההגדרה,

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty$$

לכן הנגזרת הימנית אינה קיימת.

הנגזרת של הלוגריתם

נחשב את הנגזרת של $f(x) = \ln x$ בנקודה כללית $x > 0$.

$$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \ln\left(\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right)$$

אנחנו יודעים שמתקיים כי $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{t}\right)^t = e^\alpha$ ולכן

$$\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \left(1 + \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{h}}\right)^{\frac{1}{h}} \xrightarrow{h \rightarrow 0+} e^{\frac{1}{x}}$$

השתמשנו בהרכבה עם $t = \frac{1}{h}$ וכן $\alpha = \frac{1}{x}$. לכן שוב לפי גבול של הרכבה עם $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0$ (רציפות),

$$f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \ln\left(\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right) = \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x}$$

באותו אופן גם $f'_-(x) = \frac{1}{x}$ ולכן בסך הכל:

משפט 4: בתחום $x > 0$ מתקיים כי $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

1.2 רציפות ואריתמטיקה

גזירות גוררת רציפות

משפט 5. אם f גזירה בנקודה x_0 אז היא רציפה בנקודה x_0 .

דוגמאות:

1. הפונקציה $[x]$ אינה רציפה בנקודה $x_0 = 1$ ולכן היא אינה גזירה שם. זה נכון למעשה בכל נקודה x_0 שלמה.

בכל נקודה x_0 אחרת מתקיים כי $f'(x_0) = 0$ שכן f קבועה בסביבת x_0 .

2. הפונקציה $|x|$ רציפה בנקודה $x_0 = 0$ אבל אינה גזירה שם. כלומר, רציפות לא גוררת גזירות. נראה שהיא אינה גזירה על ידי חישוב של נגזרות חד צדדיות:

$$\begin{cases} f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \\ f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \end{cases}$$

לכן $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, ולכן f לא גזירה בנקודה זו.

אריתמטיקה של נגזרות

משפט 6: נניח כי f ו- g גזירות בנקודה x_0 . אז:

1. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ ו- x_0 גזירה בנקודה $f + g$.

2. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ ו- x_0 גזירה בנקודה fg .

3. אם בנוסף $g(x_0) \neq 0$ אז $\frac{f}{g}$ גזירה בנקודה x_0 ו- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

דוגמה: לכל $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, כאשר $k \in \mathbb{Z}$, הפונקציה $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ גזירה ונגזרתה היא

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

1.3 כלל השרשרת

ניסוח כלל השרשרת ודוגמאות מקדימות

האם ניתן לגזור הרכבה $g(f(x))$ אם כן, אז איך?

השיטה בדרך כלל נגמרת בבית הספר: $(g(f(x)))' = g'(f(x)) f'(x)$. "נגזרת חיצונית בנקודה הפנימית כפול נגזרת פנימית".

דוגמאות:

1. למשל, $(\sin(x^2))' = \cos(x^2) \cdot 2x$.

משפט 7: נניח כי f גזירה בנקודה x_0 ו- g גזירה בנקודה $f(x_0)$. אז ההרכבה $g \circ f$ גזירה בנקודה x_0 ומתקיים כי

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$$

הרעיון האינטואיטיבי הוא

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

האינטואיציה הזו יכולה כמעט להיות הוכחה, אילולא הסכנה שהמכנה $f(x) - f(x_0)$ יתאפס בסביבת x_0 . מתברר שכדי לפתור את הבעיה הזו נדרשת הוכחה לא לגמרי טריוויאלית.

“ My beautiful proof lies all in ruins.

”

Georg Cantor