

## הרצאה 12: משפטי יסוד של פונקציות רציפות

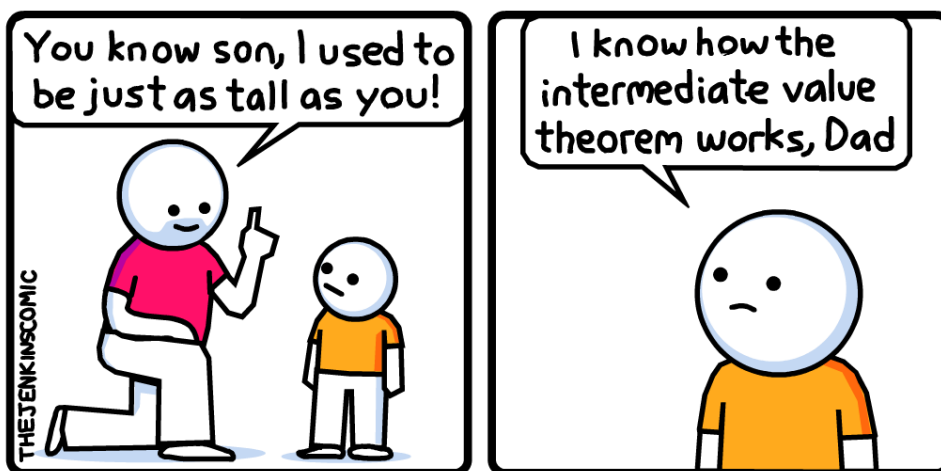
יוחאי מעין

### הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל [yohaim@tauex.tau.ac.il](mailto:yohaim@tauex.tau.ac.il) יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

### תוכן העניינים

|   |                                                              |
|---|--------------------------------------------------------------|
| 2 | 1 פונקציות רציפות (המשך)                                     |
| 2 | 1.1 פונקציות שרציפות בקטע ומשפט ערך הביניים                  |
| 5 | 1.2 פונקציות שרציפות בקטע - רציפות של הופכית ומשפטי וירשטראס |



# 1 פונקציות רציפות (המשך)

## 1.1 פונקציות שרציפות בקטע ומשפט ערך הביניים

### פונקציות שרציפות בקטע

#### הגדרה:

1. נאמר שפונקציה  $f(x)$  היא רציפה בקטע  $(a, b)$  אם לכל  $x_0 \in (a, b)$  מתקיים ש- $f$  רציפה בנקודה  $x_0$ .
2. נאמר שפונקציה  $f(x)$  היא רציפה בקטע  $[a, b]$  אם לכל  $x_0 \in (a, b)$  מתקיים ש- $f$  רציפה בנקודה  $x_0$ , ובנוסף רציפה מימין בנקודה  $x = a$  ורציפה משמאל בנקודה  $x = b$ .
3. נאמר שפונקציה  $f(x)$  היא רציפה בקטע  $(a, b]$  אם לכל  $x_0 \in (a, b)$  מתקיים ש- $f$  רציפה בנקודה  $x_0$ , ובנוסף רציפה משמאל בנקודה  $x = b$ .
4. נאמר שפונקציה  $f(x)$  היא רציפה בקטע  $[a, b)$  אם לכל  $x_0 \in (a, b)$  מתקיים ש- $f$  רציפה בנקודה  $x_0$ , ובנוסף רציפה מימין בנקודה  $x = a$ .
5. נאמר שפונקציה  $f(x)$  היא רציפה בקטע  $(a, \infty)$  אם לכל  $x_0 \in (a, \infty)$  מתקיים ש- $f$  רציפה בנקודה  $x_0$ .
6. נאמר שפונקציה  $f(x)$  היא רציפה בקטע  $[a, \infty)$  אם לכל  $x_0 \in (a, \infty)$  מתקיים ש- $f$  רציפה בנקודה  $x_0$ , ובנוסף רציפה מימין בנקודה  $x = a$ .
7. נאמר שפונקציה  $f(x)$  היא רציפה בקטע  $(-\infty, b)$  אם לכל  $x_0 \in (-\infty, b)$  מתקיים ש- $f$  רציפה בנקודה  $x_0$ .
8. נאמר שפונקציה  $f(x)$  היא רציפה בקטע  $(-\infty, b]$  אם לכל  $x_0 \in (-\infty, b)$  מתקיים ש- $f$  רציפה בנקודה  $x_0$ , ובנוסף רציפה משמאל בנקודה  $x = b$ .
9. נאמר שפונקציה  $f(x)$  היא רציפה ב- $\mathbb{R}$  אם לכל  $x_0 \in \mathbb{R}$  מתקיים ש- $f$  רציפה בנקודה  $x_0$ .

#### דוגמאות:

1. הפונקציה  $f(x) = \sin x$  רציפה ב- $\mathbb{R}$ , ולכן גם בכל קטע אחר.
2. הפונקציה  $f(x) = \sqrt{x}$  רציפה בקטע  $[0, \infty)$ , ולכן גם בכל תת קטע כמו  $[0, 1]$ .  
למרות זאת, היא לא רציפה בנקודה  $x = 0$  כי היא לא מוגדרת באף סביבה שלה.
3. הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x}$  רציפה בקטע  $(0, \infty)$  וגם בקטע  $(-\infty, 0)$ .
4. הפונקציה  $\sqrt{x - x^2}$  רציפה בקטע  $[0, 1]$ .

## תכונות של רציפות בקטע

התכונות של רציפות בנקודה ושל רציפות חד צדדית מתורגמות באופן הבא לרציפות בקטע.

### משפט 1:

1. ניסוח היינה לרציפות  $f$  רציפה בקטע  $I$  אם ורק אם לכל סדרה  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \in I$  מתקיים כי  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$ .
2. אריתמטיקה של פונקציות רציפות אם  $f$  ו- $g$  רציפות בקטע  $I$  אז גם  $f+g$ ,  $fg$  רציפות בקטע  $I$ . בנוסף, אם  $g(x) \neq 0$  ב- $I$ , אז גם  $\frac{f}{g}$  רציפה בקטע  $I$ .
3. רציפות של הרכבה אם  $f$  רציפה בקטע  $I$  ו- $g$  רציפה בקטע  $J$ , ובנוסף  $f(I) \subset J$ , אז  $g \circ f$  (כלומר  $g(f(x))$ ) רציפה בקטע  $I$ .
4. אי-רציפויות של פונקציה מונוטונית אם  $f$  מונוטונית בקטע פתוח, אז יש לה אי-רציפויות מסוג קפיצה בלבד (אם בכלל).

## משפט ערך הביניים

משפט ערך הביניים הוא משפט יסוד ראשון על פונקציות רציפות. הוא מחבר את ההגדרה של רציפות עם אינטואיציה פופולארית: "ניתן לצייר את הגרף של  $f$  בלי להרים את העט מהדף".

**דוגמה:** נתון פולינום מתוקן ממעלה 3:  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ . אנחנו כבר יודעים שמתקיים

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

כלומר,  $f$  "מגיעה" ממינוס אינסוף ו"הולכת" לאינסוף. בנוסף, היא רציפה. לכן אמורה להיות נקודה שבה היא מתאפסת.

כלומר, אם נצליח לדייק את הדיון הנ"ל, אז לכל פולינום ממעלה 3 (מתוקן, אבל אז לכן לכולם) יש שורש ממשי.

**משפט 2.** תהי  $f$  רציפה בקטע  $[a, b]$  ונניח שהמספר  $\alpha \in \mathbb{R}$  מקיים את התנאי  $f(a) < \alpha < f(b)$  או  $f(b) < \alpha < f(a)$ . אז קיים  $c \in (a, b)$  כך ש- $f(c) = \alpha$ .

כלומר, פונקציה רציפה מקבלת את כל ערכי הביניים שלה.

ניתן לנסח את המשפט באופן שקול גם באופן הבא.

**משפט 3:** תהי  $f$  רציפה בקטע  $[a, b]$  ונניח שהמספר  $\alpha \in \mathbb{R}$  מקיים את התנאי  $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$  או  $f(b) \leq \alpha \leq f(a)$ . אז קיים  $c \in [a, b]$  כך ש- $f(c) = \alpha$ .

## הוכחה של משפט ערך הביניים

אם  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \alpha$ , נבחר  $c = \frac{a+b}{2}$  וסיימנו. אחרת נתקדם לפי מקרים.

אם  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \alpha$  אז נסמן  $a_1 = a$  ו-  $b_1 = \frac{a+b}{2}$ .

אם  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \alpha$  אז נסמן  $a_1 = \frac{a+b}{2}$  ו-  $b_1 = b$ .

בשני המקרים קיבלנו קטע חדש  $[a_1, b_1]$  שהוא חצי מהקטע המקורי, שבו מתקיימות הנחות המשפט.

נבצע את אותו תהליך על  $[a_1, b_1]$  ונקבל חצי ממנו  $[a_2, b_2]$ , וכן הלאה באינדוקציה לקבלת סדרה של קטעים  $[a_n, b_n]$ . נשים לב שלכל  $n$  מתקיים כי  $f(a_n) < \alpha < f(b_n)$ .

אם בשלב כלשהו התקיים כי  $f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) = \alpha$ , אז סיימנו עם  $c = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ . אחרת, התהליך לא נגמר וברשותנו שתי סדרות שמקיימות:

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq b$$

כלומר, אלו שתי סדרות מונוטוניות וחסומות, ולכן לפי משפט שתייהן מתכנסות לגבול:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

מצד שני ידוע כי  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$  ולכן לפי חשבון גבולות נקבל כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} \Rightarrow B - A = 0 \Rightarrow A = B$$

נסמן אם כך את הגבול המשותף בסימון  $c = A = B$  ונוכיח שאכן מתקיים  $f(c) = \alpha$ .

ראשית, מתקיים כי  $a_n, b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$  ולכן לפי ניסוח היינה לרציפות,  $f(a_n), f(b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(c)$ .

שנית, לפי תכונות סדר של גבולות,

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : f(a_n) < \alpha \Rightarrow f(c) \leq \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N} : f(b_n) > \alpha \Rightarrow f(c) \geq \alpha \end{cases} \Rightarrow f(c) = \alpha$$

לכן סיימנו.

## יישומים של משפט ערך הביניים

### דוגמאות:

1. נוכיח שלכל פולינום ממעלה אי-זוגית יש שורש (ממשי).

יהי  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$  כאשר  $n$  אי-זוגי וכן  $a_n \neq 0$ . אז

$$p(x) = \frac{1}{a_n} \left( x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \right)$$

לכן מספיק להוכיח שלביטוי בסוגריים יש שורש. נסמן

$$f(x) = x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0$$

$$b_k = \frac{a_k}{a_n} \text{ כאשר}$$

נתון כי  $n$  אי-זוגי ולכן

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \left( 1 + \frac{b_{n-1}}{x} + \dots + \frac{b_n}{x^n} \right) = (-\infty) \cdot (1 + 0 + \dots + 0) = -\infty$$

לכן לפי הגדרת  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  קיים  $N < 0$  כך שלכל  $x < N$  מתקיים כי  $f(x) < 0$ . נגדיר  $a = 2N$  ונקבל לכן  $f(a) < 0$ .

באותו אופן נקבל כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  ולכן קיים  $b > 0$  כך ש- $f(b) > 0$ . לבסוף,  $f$  רציפה לפי אריתמטיקה בקטע  $[a, b]$  ומתקיים כי  $f(a) < 0$  ו- $f(b) > 0$ . לכן קיים  $c \in (a, b)$  כך ש- $f(c) = 0$ .

2. נוכיח שקיים פיתרון למשוואה  $e^x = 3x$ .

נסמן  $f(x) = e^x - 3x$ . אז  $f(0) = 1 > 0$  ומצד שני  $f(1) = e - 3 < 0$ .

הפונקציה  $f$  אלמנטרית ולכן ברציפה בקטע  $[0, 1]$  ולכן לפי משפט ערך הביניים קיים  $c \in (0, 1)$  כך ש- $f(c) = 0$ . כלומר:

$$0 = e^c - 3c \Rightarrow e^c = 3c$$

לכן  $c$  הוא פיתרון למשוואה.

### פונקציה רציפה מעבירה קטע לקטע

דרך אחרת לנסח את משפט ערך הביניים, היא לומר שאם  $f$  רציפה בקטע  $[a, b]$  אז התמונה  $f([a, b])$  היא גם קטע. באופן כללי יותר:

**משפט 4:** תהי  $f$  רציפה בקטע  $I$ . אז התמונה  $f(I)$  היא קטע.

כאן קטע יכול להיות גם לא חסום, כלומר קרן. הוכחנו עבור קטע סגור וחסום היות שזהו משפט ערך הביניים; ההוכחה במקרים אחרים תושאר לתרגיל.

## 1.2 פונקציות שרציפות בקטע - רציפות של הופכית ומשפטי וירשטראס

### הפיכה של רציפה היא רציפה

נשתמש במשפט הבא ללא הוכחה (אולי יוכח בתרגול).

**משפט 5:** תהי  $f$  רציפה וחד ערכית בקטע  $I$ . נסמן ב- $J$  את התמונה  $f(I)$  (זהו קטע, לפי משפט 4). אז הפונקציה  $J \rightarrow I : f^{-1}$  היא רציפה ב- $J$ .

**דוגמה:** הפונקציות  $\ln x$ ,  $\arctan x$ ,  $\arcsin x$  רציפות לפי המשפט.

נקבל כמסקנה את המשפט הבא, שמאפשר לחסוך בהסברים במהלך דוגמאות.

**מסקנה:** כל פונקציה אלמנטרית היא רציפה בתחום הגדרתה.

### דוגמאות:

1. הפונקציה  $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$  אינה רציפה בנקודה  $x = 0$  ולכן אינה אלמנטרית ב- $\mathbb{R}$ .

2. הפונקציה  $\sqrt{x^2} = |x|$  בתחום  $x \neq 0$  היא אלמנטרית. המגבלה  $x \neq 0$  מתקבלת מכך שפונקצית השורש אלמנטרית על פי הייצוג  $\sqrt{x} = e^{\frac{1}{2} \ln x}$  אשר תקף עבור  $x > 0$  בלבד.

בכל זאת,  $|x|$  רציפה גם בנקודה  $x = 0$  שאינה שייכת לתחום ההגדרה שלה כאלמנטרית (נדייק: בעתיד נוכיח כי  $|x|$  אינה אלמנטרית בתור פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ). המשפט כמובן אינו אם ורק אם.

### משפט וירשטראס הראשון

המשפטים של וירשטראס הם שני משפטי היסוד האחרים שנכיר עבור פונקציות רציפות.

**משפט 6.** תהי  $f(x)$  רציפה בקטע  $[a, b]$ . אז הפונקציה  $f$  חסומה בקטע  $[a, b]$ .

משפט וירשטראס הראשון אומר: קיימים שני חסמים  $m, M$  כך שלכל  $x \in [a, b]$  מתקיים כי

$$m \leq f(x) \leq M$$

הוכחה: נוכיח ש- $f$  חסומה מלעיל. ההוכחה שהיא חסומה מלרע דומה, או שאפשר לטעון שהפונקציה  $-f(x)$  גם רציפה ולכן חסומה מלעיל, מה שאומר מיד כי  $f$  חסומה מלרע.

נניח בשלילה ש- $f$  אינה חסומה מלעיל. לכן לכל  $n$  קיים  $x_n \in [a, b]$  עבורו  $f(x_n) > n$ . לכן לפי כלל הפיצה,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$ .

מצד שני, הסדרה  $x_n$  חסומה:  $a \leq x_n \leq b$ . לכן לפי משפט בולצאנו וירשטראס יש לה תת סדרה מתכנסת  $x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x_0$ . לפי תכונות סדר של גבולות מתקיים כי  $a \leq x_0 \leq b$ .

לכן  $f$  רציפה בנקודה  $x_0$  ולכן לפי קריטריון היינה לרציפות:

$$\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$$

□

זו סתירה.

### דוגמאות:

1. הפונקציה חייבת להיות רציפה. למשל,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

בקטע  $[0, 1]$  היא דוגמה של פונקציה לא רציפה ולא חסומה בקטע סגור.

2. תחום ההגדרה חייב להיות קטע סגור. אם הוא לא קטע, אז למשל  $f(x) = x$  בקרן  $[2, \infty)$  היא דוגמה של פונקציה רציפה ולא חסומה בקרן.

3. תחום ההגדרה חייב להיות קטע סגור. אם הוא קטע אבל לא סגור, אז למשל  $f(x) = \frac{1}{x}$  בקטע  $(0, 1)$  ו- $f(x) = \tan x$  בקטע  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  הם דוגמאות של פונקציות רציפות ולא חסומות בקטע פתוח.

### משפט וירשטראס השני

**משפט 7.** תהי  $f(x)$  רציפה בקטע  $[a, b]$ . אז הפונקציה  $f$  מקבלת מינימום ומקסימום בקטע  $[a, b]$ .

משפט וירשטראס השני אומר: קיימות שתי נקודות  $x_1, x_2 \in [a, b]$  כך שלכל  $x \in [a, b]$  מתקיים כי

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

לכן זה ברור שהשני חזק מהראשון. מצד שני, נוכיח את השני באמצעות הראשון.

**מסקנה:** פונקציה רציפה מעבירה קטע סגור וחסום לקטע סגור וחסום.

“ When I wrote this, only God and I understood what I was doing. Now, God only knows.

”

Karl Weierstrass