

הרצאה 11: קריטריון היינה לגבול בנקודה, תנאי קושי, רציפות

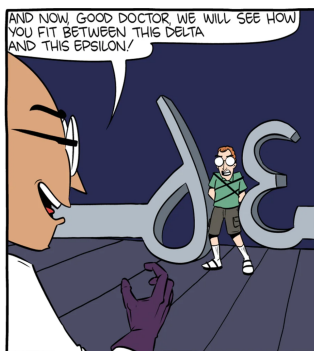
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1 גבול של פונקציה בנקודה (המשך)
2	1.1 קריטריון היינה ותנאי קושי
4	2 פונקציות רציפות
4	2.1 הגדרה של רציפות וסוגים של אי-רציפות



Soon, soon the calculus teacher would become arbitrarily small.

1 גבול של פונקציה בנקודה (המשך)

1.1 קריטריון היינה ותנאי קושי

קריטריון היינה

משפט 1.

1. תהי f מוגדרת בסביבה מנוקבת של $x = a$ ויהי $L \in \mathbb{R}$ או $L = \infty$ או $L = -\infty$. אז $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ אם ורק אם לכל סדרה $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ מתקיים כי $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$.
2. תהי f מוגדרת בסביבה ימנית של $x = a$ ויהי $L \in \mathbb{R}$ או $L = \infty$ או $L = -\infty$. אז $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$ אם ורק אם לכל סדרה $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ מתקיים כי $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$.
3. תהי f מוגדרת בסביבה שמאלית של $x = a$ ויהי $L \in \mathbb{R}$ או $L = \infty$ או $L = -\infty$. אז $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$ אם ורק אם לכל סדרה $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ מתקיים כי $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$.

דוגמאות עם קריטריון היינה

דוגמאות:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \text{ נחשב את הגבול}$$

ידוע כי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. לכן לפי קריטריון היינה עם $x_n = \frac{1}{n}$ ו- $0 \neq x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ נקבל כי

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n}$$

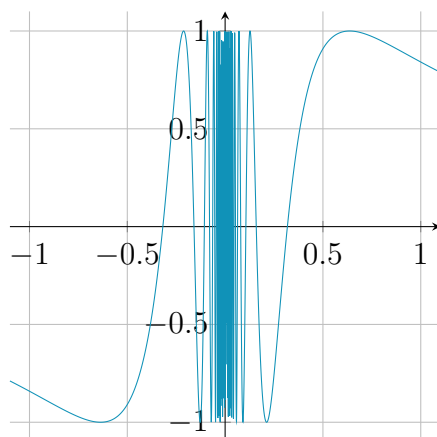
$$\text{לכן } \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

2. נקבע $x_0 \in \mathbb{R}$. לפי אריתמטיקה מורחבת של גבולות של סדרות, לכל סדרה $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ מתקיים כי $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{x_n} = e^{x_0}$.

לכן לפי קריטריון היינה מתקיים כי $\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}$.

3. הגבול $\lim_{x \rightarrow 0+} \sin \frac{1}{x}$ אינו קיים, וזו דוגמה מעניינת בין היתר כי הפונקציה $\sin \frac{1}{x}$ חסומה.

ההוכחה קצרה בעזרת קריטריון היינה. בכל זאת, נשקיע קצת זמן בהבנה של הפונקציה $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. היא עוברת על ערכי $\sin t$ באופן הפוך, כי $\frac{1}{x}$ מכסה את הערכים $t \geq 1$ בקטע $0 < x \leq 1$. הגרף נראה כך:



כל אינסוף המחזורים דחוסים בצפיפות הולכת וגדלה ליד $x=0$.

בפרט, יש סדרה $x_n \rightarrow 0$ שבה $x_n \neq 0$ שעליה $f(x_n) \equiv 1$: $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$

באותו אופן, יש סדרה $y_n \rightarrow 0$ שבה $y_n \neq 0$ שעליה $f(y_n) \equiv -1$: $y_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n}$

לו הגבול $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ היה קיים אז לפי קריטריון היינה היה צריך להתקיים כי

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = -1$$

זה כמובן לא מתקיים ולכן הגבול לא קיים.

באופן דוגמה לדוגמה עם $\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}$, כללי הגבולות עם חזקות שידועים לנו מסדרות נכונים גם עבור פונקציות.

גבול של הרכבה

משפט 2. אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ו- $\lim_{x \rightarrow L} g(x) = K$ ונוסף $f(x) \neq L$ בסביבה מנוקבת של $x = a$ אז $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = K$.

ניתן להוכיח גם לפי הגדרות הגבול ללא קריטריון היינה.

דוגמאות:

1. מתקיים כי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ולכן גם $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin((x-1)^2)}{(x-1)^2} = 1$, שכן $0 \neq (x-1)^2 \rightarrow 0$ בסביבה מנוקבת של $x = 1$.

2. התנאי כי $f(x) \neq L$ בסביבה מנוקבת של $x = a$ חשוב.

למשל, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ וכן $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ (חסומה כפול שואפת לאפס). אבל זה לא נכון לומר:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \sin \frac{1}{x})}{x \sin \frac{1}{x}} = 1$$

שכן הביטוי הזה כלל לא מוגדר בסביבה מנוקבת של $x = 0$.

הערה: גבול של הרכבה עובד גם עבור גבולות חד צדדיים עם ההנחה כי $f(x) > L$ או $f(x) < L$ בהתאם לגבול הנתון של g , עם הוכחות דומות.

קריטריון קושי

משפט 3: תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה $x = a$. אז הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x, y אשר מקיימים כי $|x - a|, |y - a| < \delta$ מתקיים $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

נעיר שיש גם ניסוח אנלוגי עבור גבול באינסוף. ההוכחה תושאר לתרגיל.

באופן דומה המשפט גם נכון עבור קיום של $\lim_{x \rightarrow a \pm} f(x)$ עם ההתאמה ש- x, y נלקחים רק מהצד המתאים של a .

2 | פונקציות רציפות

2.1 הגדרה של רציפות וסוגים של אי-רציפות

הגדרות

בפרק זה נדבר על פונקציות רציפות: פונקציות שכדי לחשב גבולות שלהן, אפשר פשוט להציב.

הגדרה 4. תהי $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודה קבועה.

1. תהי f פונקציה אשר מוגדרת בסביבה של הנקודה x_0 . נאמר שהפונקציה f רציפה בנקודה x_0 אם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
2. אם f מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0 , ו- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ קיים אבל אינו שווה לערך $f(x_0)$, או ש- f אינה מוגדרת בנקודה x_0 , נאמר ש- x_0 היא נקודת אי-רציפות סליקה.
3. אם f מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0 , והגבולות החד-צדדיים $\lim_{x \rightarrow x_0 \pm} f(x)$ קיימים אבל שונים, אז נאמר ש- x_0 היא נקודת אי-רציפות מסוג קפיצה.
4. אם f מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0 ולפחות אחד מבין הגבולות החד-צדדיים $\lim_{x \rightarrow x_0 \pm} f(x)$ אינו קיים, אז נאמר ש- x_0 היא נקודת אי-רציפות עיקרית.
5. תהי f פונקציה אשר מוגדרת בקטע $[x_0, b)$ עבור איזשהו $b > x_0$. נאמר שהפונקציה f רציפה מימין בנקודה x_0 אם $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$.
6. תהי f פונקציה אשר מוגדרת בקטע $(a, x_0]$ עבור איזשהו $a < x_0$. נאמר שהפונקציה f רציפה משמאל בנקודה x_0 אם $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0)$.

כפי שניתן לראות מההגדרה, רציפות של פונקציה היא תכונה מקומית: היא נקבעת על סמך ההתנהגות של f בסביבת x_0 .

דוגמאות לרציפות

דוגמאות:

1. הפונקציה $f(x) = e^x$ רציפה בכל נקודה x_0 , היות שראינו שמתקיים

$$\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}$$

2. הפונקציה $f(x) = \sin x$ רציפה בכל נקודה x_0 , היות שהוכחנו שמתקיים

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$$

באותו אופן, גם $\cos x$ רציפה בכל נקודה.

3. הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ רציפה בכל נקודה $x_0 > 0$, היות שראינו שמתקיים

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}, \quad x_0 > 0$$

היא אינה מוגדרת באף סביבה של $x_0 = 0$, אבל היא מוגדרת בסביבה ימנית שלה: $[0, 1)$ והיא אכן רציפה מימין בנקודה $x_0 = 0$, היות שגם הוכחנו שמתקיים $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} = 0$.

דוגמאות לאי-רציפויות

דוגמאות:

1. הפונקציה $f(x) = [x]$ (ערך שלם של x) רציפה בכל נקודה $x_0 \notin \mathbb{Z}$. ואכן, לכל נקודה כזו יש סביבה שבה f קבועה: אם $k < x_0 < k+1$ אז $[x] \equiv k$ בסביבת x_0 , ולכן

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [x] = k = [x_0]$$

מצד שני, אם $x_0 = k$ אז $\lim_{x \rightarrow k+} [x] = k$ בעוד $\lim_{x \rightarrow k-} [x] = k-1$. לכן בכל הנקודות הללו יש אי-רציפות מסוג קפיצה.

2. הפונקציה $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ רציפה בכל נקודה $x_0 \neq 0$. אכן, לפי חשבון גבולות מתקיים כי

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x_0}{x_0} = f(x_0)$$

מנגד, בנקודה $x_0 = 0$ מתקיים כפי שראינו $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. היות שהפונקציה לא מוגדרת בנקודה זו, יש בה אי-רציפות סליקה.

3. הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ רציפה בכל נקודה $x_0 \neq 0$, אבל היא אינה מוגדרת בנקודה $x_0 = 0$ ולכן אינה רציפה בה.

נקבע את סוג אי-הרציפות בנקודה $x_0 = 0$. הגבול $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = \infty$ אינו קיים, ולכן מדובר באי-רציפות עיקרית.

4. הפונקציה $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ רציפה בכל נקודה $x_0 \neq 0$, אבל היא אינה מוגדרת בנקודה $x_0 = 0$ ולכן אינה רציפה בה.

נקבע את סוג אי-הרציפות בנקודה $x_0 = 0$. ראינו שהגבול $\lim_{x \rightarrow 0+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ אינו קיים (למרות ש- f חסומה!) ולכן מדובר באי-רציפות עיקרית.

5. פונקציית דיריכלה היא דוגמה קיצונית שבה כל נקודה היא אי-רציפות עיקרית:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ואכן, לכל x_0 מתקיים כי $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ אינו קיים. למשל, אם ניקח סדרת רציונלים $x_0 < x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ נקבל כי $f(x_n) \equiv 1$ ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$, ואם ניקח סדרת אי-רציונלים $x_0 < y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_0$ נקבל באותו אופן $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 0$.

תכונות בסיסיות של רציפות ושל אי רציפויות

משפט 5:

1. ניסוח היינה לרציפות f רציפה בנקודה x_0 אם ורק אם לכל סדרה $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ מתקיים כי $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$.

2. אריתמטיקה של פונקציות רציפות אם f ו- g רציפות בנקודה x_0 אז גם $f+g$, fg רציפות בנקודה x_0 . בנוסף, אם $g(x_0) \neq 0$ אז גם $\frac{f}{g}$ רציפה בנקודה x_0 .

3. רציפות של הרכבה אם f רציפה בנקודה x_0 ו- g רציפה בנקודה $f(x_0)$, אז $g \circ f$ (כלומר $g(f(x))$) רציפה בנקודה x_0 .

4. חיוביות אם f רציפה בנקודה x_0 וכן $f(x_0) > 0$, אז קיימת סביבה של x_0 שבה $f(x) > 0$.

5. אי-רציפויות של פונקציה מונוטונית אם f מונוטונית בסביבת הנקודה $x = x_0$, אז f רציפה ב- x_0 או שיש לה אי-רציפות מסוג קפיצה בנקודה x_0 . כלומר, לא תיתכן אי-רציפות סליקה וכן לא תיתכן אי-רציפות עיקרית.

לכן לפונקציה מונוטונית בקטע פתוח יש אי-רציפויות מסוג קפיצה (אם בכלל) בלבד.

6. רציפה אם ורק אם מימין ומשמאל f רציפה בנקודה x_0 אם ורק אם היא רציפה מימין וגם רציפה משמאל בנקודה x_0 .

כל התכונות הן תכונות של גבול של פונקציה, מתורגמות לשפה של רציפות. בכל זאת, כדי לדייק, רצוי להוכיח אותן - נסו לעשות זאת בתור תרגיל. ההוכחות קצרות מאוד, בהתבסס על התכונה המקבילה בגבולות.

“ Men pass on, but their work remains.

”

Augustin-Louis Cauchy