

הרצאה 10: גבול חד צדדי, גבולות מונוטוניים

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1	גבול של פונקציה (המשך)
2	1.1	גבול חד צדדי
4	1.2	גבולות מונוטוניים



1 | גבול של פונקציה (המשך)

1.1 גבול חד צדדי

הגדרה של גבול חד-צדדי

יש מקרים שבהם יש טעם לדבר על גבול חד צדדי, כמו למשל במקרה של $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ שאינו קיים במובן הרחב, אל מול $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = \infty$ ו- $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty$.
הנה ההגדרות המדויקות עבור גבול מימין $x \rightarrow a+$. ההגדרות, הסימונים והתכונות עבור $x \rightarrow a-$ אנלוגיים לחלוטין.

הגדרה: תהי f פונקציה שמוגדרת בסביבה מנוקבת ימנית של הנקודה $x = a$, כלומר, בקטע מהצורה (a, b) כאשר $b > a$.

1. יהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר ש- f מתכנסת ל- L כאשר x שואף ל- a מימין, ונסמן $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$, אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (a, b)$ שמקיים $a < x < a + \delta$ מתקיים כי $|f(x) - L| < \epsilon$.

2. נאמר ש- f שואפת לאינסוף כאשר x שואף ל- a מימין, ונסמן $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty$, אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (a, b)$ שמקיים $a < x < a + \delta$ מתקיים כי $f(x) > M$.

3. נאמר ש- f שואפת למינוס אינסוף כאשר x שואף ל- a מימין, ונסמן $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty$, אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (a, b)$ שמקיים $a < x < a + \delta$ מתקיים כי $f(x) < M$.

דוגמה: נוכיח כי $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = \infty$. יהי $M \in \mathbb{R}$.

אם $M \leq 0$ אז לכל $x > 0$ מתקיים כי $\frac{1}{x} > 0 \geq M$ ולכן ניתן לבחור $\delta = 1$ (או כל $\delta > 0$ אחר). נקבל שלכל $0 < x < \delta$ מתקיים כי $\frac{1}{x} > M$.

אם $M > 0$ אז אי השוויון $\frac{1}{x} > M$ מתקיים אם ורק אם $0 < x < \frac{1}{M}$. לכן נקבע $\delta = \frac{1}{M} > 0$ ובכך נסיים.

באותו אופן ניתן להוכיח כי $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty$.

תכונות של גבול חד צדדי

במשפט הבא ובכלל, נשתמש במושג "סביבה" ימנית של a בשביל לתאר קטע מהצורה $(a, a + \delta)$ עבור איזשהו $\delta > 0$.

משפט 1:

1. הגבול הוא יחיד: אם $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$ וגם $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = K$ אז $L = K$.

2. אם הגבול $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ קיים, אז קיימת סביבה ימנית של a שבה $f(x)$ חסומה.

3. תכונות סדר של גבולות:

- א. אם הגבולות קיימים וכן $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) < \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$ אז קיימת סביבה ימנית של a שבה מתקיים $f(x) < g(x)$.
- ב. אם $f(x) \leq g(x)$ בסביבה ימנית של a והגבולות קיימים אז $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$.
4. אריתמטיקה מורחבת של גבולות:
- א. אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} K$, אז $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} L + K$, $\infty - \infty$.
- ב. אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} K$, אז $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} LK$ בתנאי שלא כתוב $0 \cdot \infty$.
- ג. אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} K$, אז $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \frac{L}{K}$ בתנאי שהביטוי $\frac{f(x)}{g(x)}$ מוגדר (בין אם כמנת מספרים או במובן הרחב, כפי שתיארנו בגבול של מנה במובן הרחב בסדרות).
5. גבול וערך מוחלט:
- א. אם $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ אז $\lim_{x \rightarrow a^+} |f(x)| = |L|$ (כולל המקרה $L = \pm\infty$, עם $|L| = \infty$).
- ב. אם $\lim_{x \rightarrow a^+} |f(x)| = 0$ אז $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0$.
- ג. אם $L \in \mathbb{R}$ (כלומר, סופי) אז $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ אם ורק אם $\lim_{x \rightarrow a^+} |f(x) - L| = 0$.
6. גבול של חזקה:
- אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} K$, אז $f(x)^{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} L^K$ בתנאי שהביטוי L^K מוגדר (בין אם כחזקה בין מספרים או במובן הרחב, כפי שתיארנו בגבול של חזקות במובן הרחב בסדרות).
7. כלל הסנדוויץ':
- אם לכל x בסביבה ימנית של a מתקיים $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, ובנוסף $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} L$ ו- $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} L$, אז $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} L$.
8. חסומה כפול שואפת לאפס:
- אם f חסומה בסביבה ימנית של a ובנוסף $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} 0$, אז $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} 0$.
9. כלל הפיצה:
- אם לכל x בסביבה ימנית של a מתקיים $f(x) \leq g(x)$, ובנוסף $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \infty$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \infty$.

כל התכונות נכונות גם עבור גבול משמאל וסביבות שמאליות.

הגבול קיים אם ורק אם הגבולות החד-צדדיים קיימים ושווים

משפט 2: תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה $x = a$. אז הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ קיים במובן הרחב ושווה ל- L אם ורק אם שני הגבולות החד-צדדיים $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ו- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ קיימים במובן הרחב ושווים ל- L .

כלומר, הגבול קיים במובן הרחב אם ורק אם הגבולות החד-צדדיים קיימים ושווים.

דוגמאות עם גבולות חד צדדיים

1. ראינו כי $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$. לפי זוגיות קל מאוד להוכיח שגם $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x}{x} = 1$. לכן לפי המשפט, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2. נתונה הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{x+3} & x < 0 \\ \frac{\sin(\alpha x)}{x} & x > 0 \end{cases}$$

לאילו ערכים של $\alpha \in \mathbb{R}$ הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ קיים?

ראשית לפי אריתמטיקה של גבולות,

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2x-1}{x+3} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

שנית, $\frac{\sin(\alpha x)}{x} = \alpha \cdot \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}$. מתקיים כי $\lim_{x \rightarrow 0+} \alpha x = 0$ ולכן אם נסמן $t = \alpha x$ אז

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(\alpha x)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \alpha \cdot \frac{\sin t}{t} = \alpha \cdot 1 = \alpha$$

לסיכום, לפי המשפט הגבול קיים אם ורק אם $\alpha = -\frac{1}{3}$.

האם ההסבר של סימון $t = \alpha x$ ומעבר לגבול $t \rightarrow 0$ הוא נכון? והאם אנחנו יודעים שהוא נכון? אלו שתי שאלות שונות.

הוא נכון, כי $\alpha x \neq 0$ לכל $x \neq 0$.

אנחנו נדע שהוא נכון בקרוב כאשר נדבר על גבול של הרכבה.

1.2 גבולות מונוטוניים

מונוטוניות וחסומה מתכנסת

משפט 3: נניח כי f עולה בקטע (a, b) . אם f חסומה מלעיל בקטע (a, b) אז הגבול $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$ קיים ושווה לחסם העליון $\sup_{(a,b)} f$.

באופן דומה, אם f חסומה מלרע אז $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \inf_{(a,b)} f$ והמשפט נכון כמובן עבור פונקציה יורדת, בחילופי תפקידים בין חסמים מלמעלה ומלמטה.

מסקנה: אם f עולה בקטע (a, b) אז $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ ו- $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$ קיימים במובן הרחב. אם היא חסומה מלמעלה אז $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \sup_{(a,b)} f$ ואחרת $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \infty$. אם היא חסומה מלמטה אז $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \inf_{(a,b)} f$ ואחרת $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty$.
באופן דומה עבור f יורדת בחילופי תפקידים מתאימים.

המקרים האחרים ניתנים להוכחה באופן דומה.

לפונקציה מונוטונית יש גבולות חד-צדדיים בכל נקודה

נמשיך את הדיון לגבי גבול מונוטוני בהסתכלות מעט אחרת. נניח ש- f עולה בקטע (a, b) , אבל נסתכל כעת על נקודה $x_0 \in (a, b)$.

מהנתון כי f עולה בכל הקטע (a, b) נסיק מיד שהיא עולה גם בתת-הקטע $(a, x_0]$. במיוחד מתקיים לכל $a < x \leq x_0$ כי $f(x) \leq f(x_0)$. כלומר, המספר $f(x_0)$ מהווה חסם מלעיל של f בקטע $(a, x_0]$.

בסך הכל, אם f עולה בקטע (a, b) אז לכל $x \in (a, b)$ מתקיימים תנאי המשפט עבור תת-הקטע (a, x_0) ולכן $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ קיים ושווה לחסם העליון של f בקטע (a, x_0) .

דוגמה: יתכן שמתקיים $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) \neq f(x_0)$, אבל רק אם $f(x_0)$ גדול יותר מהגבול (כי f עולה). למשל, עבור $f(x) = [x]$ שהיא עולה,

$$\lim_{x \rightarrow 1-} [x] = 0 < 1 = [1].$$

כל הנ"ל עובד גם עבור הגבול מימין בנקודה x_0 וכן אם f יורדת. לכן בסך הכל נקבל את המשפט הבא:

משפט 4: אם f מונוטונית בקטע (a, b) , אז לכל $x_0 \in (a, b)$ מתקיים כי הגבולות החד-צדדיים $\lim_{x \rightarrow x_0 \pm} f(x)$ קיימים.

זהירות: יתכן ששני הגבולות הללו שונים אחד מהשני! בעצם, אם f עולה למשל אז בהכרח

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$$

אבל יתכן אי-שוויון אמיתי בכל אחד משני אי-השוויונים.

המשפט למעשה נכון בדיוק באותו אופן לכל קטע I ולא רק לקטע פתוח וחסום (a, b) .

“ Quiet people have the loudest minds.

”

Stephen Hawking