

הרצאה 8: פונקציות אלמנטריות, גבול באינסוף

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1 פונקציות (המשך)
2	1.1 הפיכות והיפוך של פונקציות
6	1.2 פונקציות אלמנטריות, תמונה ותמונה הפוכה, ופונקציות חסומות
8	2 גבול של פונקציה
8	2.1 גבול של פונקציה באינסוף

$f(x):$



$g(x):$



$(f \circ g)(x):$



$(g \circ f)(x):$



1 | פונקציות (המשך)

1.1 הפיכות והיפוך של פונקציות

הרכבה של פונקציות

הגדרה: תהייה $f : A \rightarrow B$ ו- $g : B \rightarrow C$ שתי פונקציות. ההרכבה של g על f , שתסומן $g \circ f$, היא הפונקציה $g \circ f : A \rightarrow C$ שמוגדרת על ידי

$$g \circ f(a) = g(f(a))$$

דוגמאות:

1. הפונקציה $\sin(x^2)$ היא הרכבה של $g(x) = \sin x$ על $f(x) = x^2$.

2. הפונקציה $\sin^2 x$ היא הרכבה של $g(x) = x^2$ על $f(x) = \sin x$.

3. על פניו, הפונקציה $\tan(x^2)$ אינה ההרכבה של $g(x) = \tan x$ על $f(x) = x^2$, כי תחום ההגדרה של g קטן יותר מהטווח של f . נוכל להכריז אם כך שלצורך הדוגמה הזו, f תצומצם לתחום הגדרה כזה שתמונתה לא תכיל נקודות שאינן בתחום ההגדרה של g , ונצמצם את הטווח של f לתחום ההגדרה של g . לא נעשה זאת בכל פעם אבל זה תמיד אפשרי, כאשר כמובן ההרכבה לא מוגדרת לכל x אלא רק ל- x כך ש- $x^2 \neq \frac{\pi}{2}k$ עבור $k \in \mathbb{N}$.

הגדרה: פונקציה $f : A \rightarrow B$ נקראת **הפיכה** אם קיימת פונקציה $g : B \rightarrow A$ שמכונה **ההופכית** (או הפונקציה ההפוכה) של f , כך שמתקיימים שני התנאים:

$$\begin{cases} g(f(a)) = a, \forall a \in A \\ f(g(b)) = b, \forall b \in B \end{cases}$$

נעיר שמעצם ההגדרה, אם g היא ההופכית של f אז f היא ההופכית של g (ובפרט g גם הפיכה).

דוגמאות:

1. הפונקציה $f(x) = x^3$ הפיכה, כי אם נסמן $g(y) = \sqrt[3]{y}$ אז לכל x ו- y מתקיימים התנאים

$$\begin{cases} g(f(x)) = \sqrt[3]{x^3} = x \\ f(g(y)) = (\sqrt[3]{y})^3 = y \end{cases}$$

2. הפונקציה $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ אינה הפיכה. נבין זאת מיד.

באופן כללי, הטכניקה לבדיקת הפיכות ולמצאת הופכית היא פשוטה. כותבים $y = f(x)$ ומחלצים את x .

כאן, למשל:

$$y = \frac{x-1}{x+3} \iff xy + 3y = x - 1 \iff x(y-1) = -3y - 1$$

הבעיה: עבור $y = 1$ אין פיתרון למשוואה הזו. כלומר, לערך $y = 1$ אין x שמקיים $f(x) = y$. נראה מיד שזה בהכרח אומר ש- f אינה הפיכה. מצד שני, אם נשנה את הטווח כך שיתאים לאילוף הנ"ל: $y \neq 1$, אז ניתן לסיים את החילוף ולקבל

$$x = \frac{3y+1}{1-y} =: g(y)$$

בדקו כעת ש- g היא ההופכית של f עם הטווח המצומצם.

אם נסכם את הטכניקה בדוגמה האחרונה: מחלצים את x מתוך $y = f(x)$, ולביטוי שמתקבל קוראים $g(y)$. מתהליך החילוף חייב להיות בדיוק x מתאים אחד לכל y (כלומר, ללא ריבוי או חוסר פתרונות לא y).

המשפט הבא מדייק את העיקרון הזה.

הפיכה אם ורק אם חד ערכית ועל

משפט 1: תהי $f: A \rightarrow B$. אז הפיכה אם ורק אם היא חח"ע ועל.

לא נוכיח את המשפט.

דוגמה: ראינו שהפונקציה $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ היא הפיכה אם מצמצמים את הטווח ל- $y \neq 1$. לפי המשפט, היא לכן חח"ע.

כלומר, ניתן להוכיח חד-חד-ערכיות ו / או על באמצעות מציאת פונקציה הופכית: אם יש הופכית, אז הוכחנו.

נעיר שניתן לצייר את הגרף של g אפילו בלי למצוא אותה, מתוך הגרף של f . הכלל הוא שיקוף ביחס לישר $y = x$, כלומר, חושבים על $y = x$ כמראה.

הסיבה היא שאם הנקודה $(1, 2)$ היא על הגרף של f אז $2 = f(1)$. אבל אז $1 = g(2)$ ולכן $(1, 2)$ על הגרף של g .

דוגמאות של פונקציות הפוכות

דוגמאות:

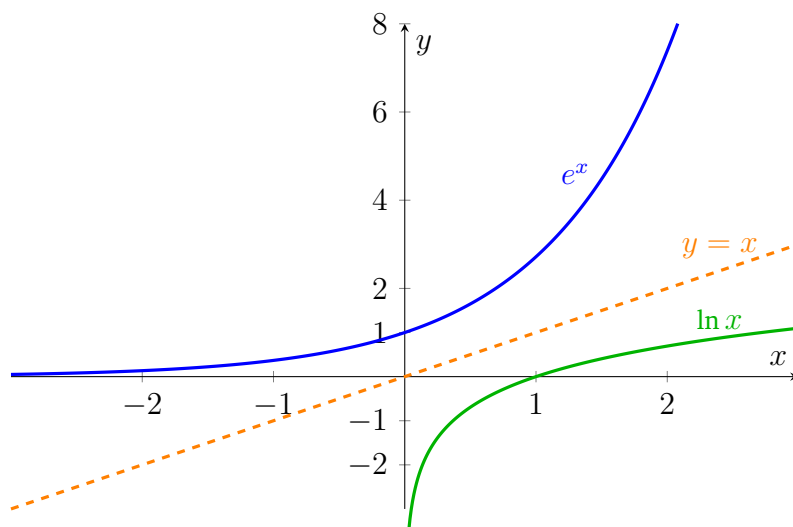
1. האם הפונקציה $\sqrt{x}$ היא ההפוכה של $f(x) = x^2$? התשובה מתחלקת לשני חלקים.

ראשית, $f(x) = x^2$ אינה הפיכה בתור $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. לכן התשובה היא לא. בכל זאת, ניתן להתאים את תחום ההגדרה והטווח באופן הבא: $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$. כעת היא כבר חח"ע ועל.

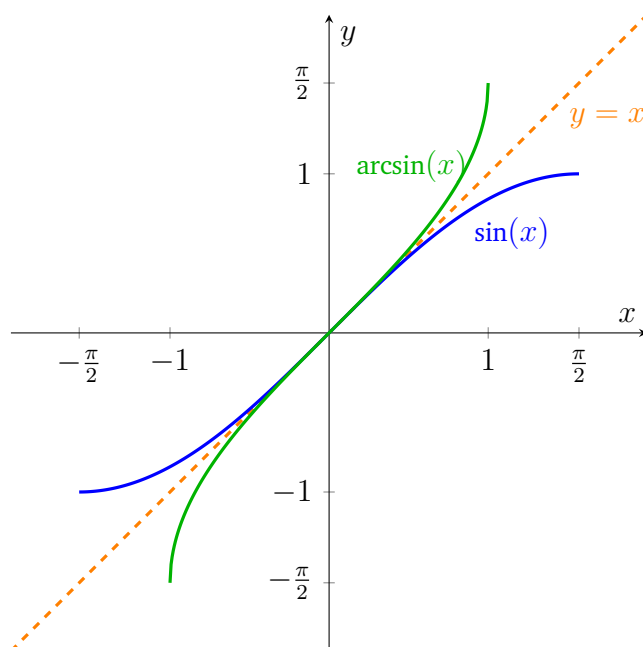
שנית, על פניו הסימון צריך להיות $g(y) = \sqrt{y}$ ולא $\sqrt{x}$. אבל נוח לנו עם x כמשתנה ולכן בסיום נחזור אליו תמיד.

2. באופן דומה, נצמצם את הטווח של $f(x) = e^x$ אל $(0, \infty)$ ונקבל פונקציה חח"ע ועל. הפונקציה ההפוכה שלה מסומנת $\ln x$. כלומר:

$$\begin{cases} e^{\ln x} = x, & \forall x > 0 \\ \ln(e^x) = x, & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



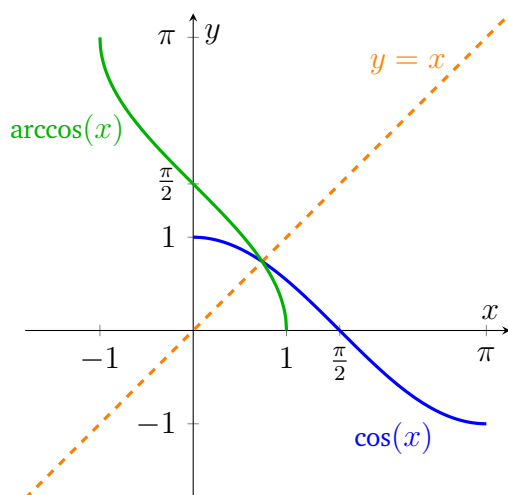
3. הפונקציה $f(x) = \sin x$ כמובן אינה הפיכה. היא לא חח"ע ולא על. תמונתה היא הקטע $[-1, 1]$, ולכן נצמצם את הטווח לזה. על מנת שתהיה חד-חד-ערכית יש אינסוף צמצומים אפשריים של תחום הגדרתה, ונבחר את הפשוט ביותר: $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$. הפונקציה ההפיכה לפי המוסכמה הזו תסומן ב- $\arcsin x$.



בפרט, היא מוגדרת עבור $-1 \leq x \leq 1$ בלבד, ולכל x כזה מתקיים תמיד ש-

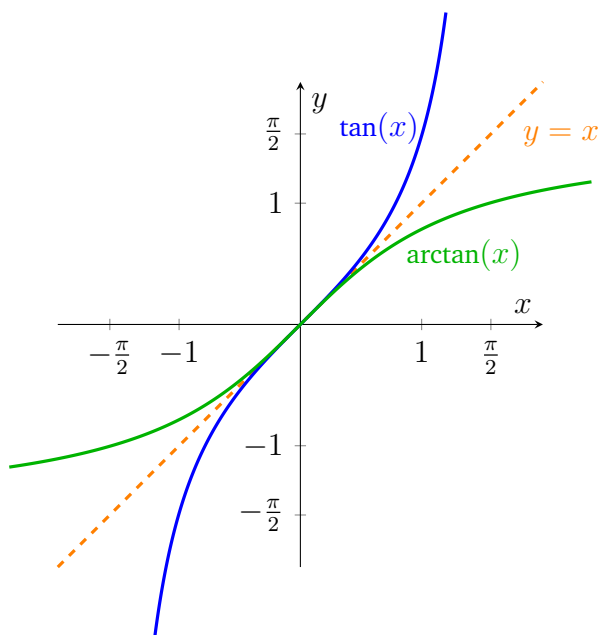
$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}.$$

4. באופן דומה, נחשוב על $f(x) = \cos x$ בתור $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ונקבל את $\arccos x$.



5. בניגוד לנ"ל, הפונקציה $f(x) = \tan x$ היא על. על מנת שתהיה גם חד-חד-ערכית, נחשוב עליה בתור $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$. שימו לב לכך שהקטע כאן פתוח, מפני ש- $\tan(\pm\frac{\pi}{2})$ לא מוגדר.

הפונקציה ההפוכה המתאימה תסומן $\arctan x$.



באופן דומה, נחשוב על $f(x) = \cot x$ בתור $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ ונקבל את $\operatorname{arccot} x$.

1.2 פונקציות אלמנטריות, תמונה ותמונה הפוכה, ופונקציות חסומות

פונקציות אלמנטריות

הגדרה: הפונקציות האלמנטריות הבסיסיות הן:

$$1. \text{ הפונקציות } 1, x, \sin x, \cos x, e^x.$$

$$2. \text{ הפונקציות ההפוכות: } \arcsin x \text{ בקטע } (-1, 1), \arccos x \text{ בקטע } (-1, 1), \arctan x, \ln x \text{ בקטע } (0, \infty).$$

פונקציה אלמנטרית היא פונקציה שמתקבלת כמספר סופי של סכומים, מכפלות (כולל כפל בקבוע) והרכבות של מספר סופי של פונקציות אלמנטריות בסיסיות.

דוגמאות:

$$1. \text{ הפונקציה } \sin(x^2) \text{ היא אלמנטרית.}$$

$$2. \text{ כל פולינום, וכן כל פונקציה רציונלית, הם פונקציות אלמנטריות. למשל, } f(x) = \frac{2x^3 - \pi x^2 + 1}{4x^5 - 8}.$$

$$3. \text{ כל פונקציה מעריכית היא אלמנטרית. אכן, אם } a > 0 \text{ כלשהו, אז } a^x = e^{x \ln a}.$$

$$4. \text{ כל חזקה היא פונקציה אלמנטרית. אכן, אם } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ אז } x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

חשוב לשים לב שזה נכון עבור $x > 0$. תחום ההגדרה של $\sqrt[3]{x}$ הוא כל $\mathbb{R}$, אבל הפונקציה $\sqrt[3]{x}$ אלמנטרית בתחום $x > 0$ (וקל לבדוק, גם בתחום $x < 0$) אבל לא כפונקציה שתחום הגדרתה הוא כל $\mathbb{R}$.

$$5. \text{ הפונקציה } f(x) = [x] \text{ לא אלמנטרית. כרגע אנחנו רק יכולים לומר שאין לנו ייצוג שלה כאלמנטרית, ובעתיד הלא רחוק נוכיח שהיא אכן לא כזו.}$$

$$6. \text{ לגבי הפונקציה } |x| \text{ קיים ויכוח עתיק כמו הזמן. על פניו היא אלמנטרית כי } |x| = \sqrt{x^2} = (x^2)^{\frac{1}{2}}. \text{ אבל אם נדייק אז } \sqrt{x} = e^{\frac{1}{2} \ln x} \text{ לא עובד עבור } x = 0 \text{ ולכן } \sqrt{x} \text{ אלמנטרית בתור פונקציה שתחום הגדרתה הוא } (0, \infty).$$

לסיכום, לפי הגדרתנו לא הוכחנו כי $|x|$ אלמנטרית ובעתיד ניווכח שלמעשה היא אינה אלמנטרית. בכל זאת, לעיתים מוסיפים לאלמנטריות הבסיסיות גם את הפונקציות x^α עבור $\alpha > 0$ בתחום $x \geq 0$, ואז ההסבר הנ"ל כן עובד והפונקציה $|x|$ היא בכל זאת אלמנטרית. ההבדל לא מאוד חשוב ונתייחס למשמעותו בהמשך.

תמונה ותמונה הפוכה

נסיים במספר מושגי עזר פשוטים נוספים.

הגדרה: תהי $f: A \rightarrow B$ פונקציה.

$$1. \text{ (א) עבור } a \in A, \text{ התמונה של } a \text{ היא } f(a).$$

$$\text{(ב) עבור } S \subset A, \text{ התמונה של הקבוצה } S \text{ היא קבוצת התמונות } f(S) = \{f(a) \mid a \in S\}.$$

(ג) התמונה של תחום ההגדרה כולו $f(A)$ מכונה התמונה של f .

2. (א) נאמר ש- $a \in A$ הוא מקור של $b \in B$ אם $f(a) = b$.

(ב) עבור $T \subset B$, התמונה ההפוכה של T היא קבוצת של המקורות של איברי T , והיא מסומנת

$$f^{-1}(T) = \{a \in A \mid f(a) \in T\}$$

דוגמאות:

1. ניקח $f(x) = x^2$. התמונה של 2 היא 4, כך ש-2 מקור של 4. גם -2 מקור של 4.

התמונה של הקבוצה $[0, 3)$ היא $[0, 9)$. כלומר, $f([0, 3)) = [0, 9)$.

התמונה ההפוכה של $[0, 9)$ היא $(-3, 3)$. כלומר, $f^{-1}([0, 9)) = (-3, 3)$.

2. הפונקציה f היא חד-חד-ערכית אם ורק אם לכל $b \in B$ יש לכל היותר מקור אחד.

הפונקציה f היא על אם ורק אם $f(A) = B$.

פונקציות חסומות

כל המושגים הבאים של חסימות של פונקציה בקבוצה הם אמירות על התמונה של אותה קבוצה. למשל, f חסומה בקבוצה $S \subset \mathbb{R}$ אם $f(S) \subset \mathbb{R}$ קבוצה חסומה.

הגדרה: תהי f פונקציה ממשית (כלומר, $B = \mathbb{R}$) ותהי $S \subset A$.

1. נאמר ש- f חסומה מלעיל ב- S אם קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $a \in S$ מתקיים $f(a) \leq M$. כל מספר M כזה מכונה חסם מלעיל של f ב- S .

החסם העליון של f ב- S הוא המספר $\sup_S f = \sup f(S)$.

2. נאמר ש- f חסומה מלרע ב- S אם קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $a \in S$ מתקיים $f(a) \geq M$. כל מספר M כזה מכונה חסם מלרע של f ב- S .

החסם התחתון של f ב- S הוא המספר $\inf_S f = \inf f(S)$.

3. נאמר ש- f חסומה ב- S אם היא חסומה מלעיל וגם חסומה מלרע ב- S . נאמר ש- f חסומה אם היא חסומה ב- A .

4. נאמר ש- $x \in S$ היא נקודת מקסימום של f ב- S אם לכל $y \in S$ מתקיים $f(y) \leq f(x)$. במקרה זה, הערך $f(x)$ מכונה המקסימום של f ב- S ומסומן $\max_S f$.

קבוצות כל נקודות המקסימום של f ב- S מסומנת $\operatorname{argmax}_S f$.

5. נאמר ש- $x \in S$ היא נקודת מינימום של f ב- S אם לכל $y \in S$ מתקיים $f(y) \geq f(x)$. במקרה זה, הערך $f(x)$ מכונה המינימום של f ב- S ומסומן $\min_S f$.

קבוצות כל נקודות המינימום של f ב- S מסומנת $\operatorname{argmin}_S f$.

דוגמאות:

1. הפונקציה $f(x) = x^2$ חסומה בקטע $[-1, 2]$.
 - בנוסף, המקסימום של f בקטע הזה הוא 4, והמינימום הוא 0.
 2. הפונקציה $f(x) = \arctan x$ חסומה ב- $\mathbb{R}$. אין לה מינימום ומקסימום, אבל

$$\sup_{\mathbb{R}} f = \frac{\pi}{2}, \quad \inf_{\mathbb{R}} f = -\frac{\pi}{2}$$
 הוכיחו זאת במדויק בעזרת ההגדרה של $\arctan x$ כפונקציה הפוכה.
- משפט 2:** תהי $f(x)$ פונקציה אשר מוגדרת בקבוצה I . אז f חסומה ב- I אם ורק אם קיים M כך שלכל $x \in I$ מתקיים $|f(x)| \leq M$.
- ההוכחה דומה למשפט האנלוגי עבור קבוצות.

2 | גבול של פונקציה

2.1 גבול של פונקציה באינסוף

הגדרות ודוגמאות

בסעיף זה נכיר גבול של פונקציה בתרחיש שיהיה מאוד מוכר. היות שבילינו זמן רב עם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, נדבר כעת על $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. כפי שנראה, כל ההגדרות, הדוגמאות והתכונות יהיו כמעט זהות. הקשר המדויק בין המושגים ינתן בסוף הסעיף, בדמות **קריטריון היינה** עבור גבול של פונקציה בלשון סדרות.

הגדרה 3. תהי f פונקציה שמוגדרת בקרן (a, ∞) .

1. יהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר שמתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $N \geq a$ כך שלכל $x > N$ מתקיים $|f(x) - L| < \epsilon$.
2. נאמר שמתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $N \geq a$ כך שלכל $x > N$ מתקיים $f(x) > M$.
3. נאמר שמתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $N \geq a$ כך שלכל $x > N$ מתקיים $f(x) < M$.

דוגמה: נוכיח לפי ההגדרה שמתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+2} = 1$. כפי שנראה, מדובר בדיוק באותה הוכחה כמו של $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+2} = 1$, פשוט עם x במקום n בכל מקום. יהי $\epsilon > 0$. נעריך:

$$\left| \frac{x-1}{x+2} - 1 \right| = \left| \frac{x-1-x-2}{x+2} \right| = \left| \frac{-3}{x+2} \right| = \frac{3}{|x+2|}$$

כעת יש פרט שחשוב להתייחס אליו: הביטוי $|x+2|$ יכול להיות שלילי ואף לא מוגדר, כאשר $x \leq -2$. זה לא יכל לקרות לו היה מדובר בסדרה. בכל זאת, זה לא ישפיע על הגבול כאשר $x \rightarrow \infty$, אבל אסור להתעלם מכך בהסבר.

ניתן לומר כך: אם $x > -2$, אז

$$\left| \frac{x-1}{x+2} - 1 \right| = \frac{3}{x+2}$$

כעת, לכל $x > -2$, אי-השוויון $\frac{3}{x+2} < \epsilon$ מתקיים כאשר $x+2 > \frac{3}{\epsilon}$ ולכן לכל $x > \frac{3}{\epsilon} - 2$.

נסמן אם כך $N = \max \left\{ -2, \frac{3}{\epsilon} - 2 \right\}$ ונקבל שלכל $x > N$ מתקיים כי

$$\left| \frac{x-1}{x+2} - 1 \right| < \epsilon$$

למעשה, כמעט כל תרגיל או משפט על $x \rightarrow \infty$ שיהיה זהה לסדרה $n \rightarrow \infty$. אנחנו נראה הבדלים רק במקרים שהתנאי $n \in \mathbb{N}$ מהותי. למשל, משהו כמו $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi n) = 0$ אבל לא מתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\pi x) = 0$.

תכונות בסיסיות

אנחנו מכירים את כל התכונות הבאות, וההוכחות זהות לחלוטין עם x במקום n .

תכונות:

1. הגבול הוא יחיד: אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ וגם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = K$ אז $L = K$.

2. אם הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ קיים, אז קיים N כך ש- f חסומה בקרן (N, ∞) .

3. תכונות סדר של גבולות:

(א) אם קיים $N \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) \leq g(x)$ והגבולות קיימים במובן הרחב, אז $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$.

(ב) אם שני הגבולות קיימים במובן הרחב וכן $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) < \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ אז קיים $N \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) < g(x)$.

4. אריתמטיקה של גבולות:

א. אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} K$, אז $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L + K$ בתנאי שלא כתוב $-\infty + \infty$ או $\infty + (-\infty)$.

ב. אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} K$, אז $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} LK$ בתנאי שלא כתוב $0 \cdot (\pm\infty)$.

ג. אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} K$, אז $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{L}{K}$ בתנאי שהביטוי $\frac{L}{K}$ מוגדר במובן של אריתמטיקה עם אינסוף (למשל, $\frac{1}{0+}$ פירושו ש- g חיובית החל מנקודה מסוימת ובנוסף $g(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$).

5. אם $L \geq 0$ ו- $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$ אז $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L^K$ או $f(x)^{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L^K$ בתנאי שלא כתוב $0^0, 1^\infty$, או $0^{K < 0}$, ובתנאי שבמקרה $L = 0$ מתקיים כי $f(x) > 0$ החל ממקום מסוים.

6. אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ אז $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = |L|$.

בנוסף, $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - L| = 0$ אז $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$.

7. כלל הסנדוויץ': אם קיים $N \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, ובנוסף מתקיים כי $f(x), h(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$ אז $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$.

8. חסומה כפול שואפת לאפס: אם f חסומה בקרן ימנית ובנוסף $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$, אז מתקיים כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = 0$.

9. כלל הפיצה: אם לכל x בקרן ימנית מתקיים כי $f(x) \leq g(x)$, ובנוסף $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$, אז $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$.

10. גבול של הרכבה: אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ובנוסף $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$, אז $\lim_{x \rightarrow \infty} g(f(x)) = L$ (וכנ"ל עם $-\infty$).

11. גבול מונוטוני: אם f עולה בקרן (a, ∞) אז הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ קיים במובן הרחב. בנוסף, הוא סופי אם ורק אם f חסומה מלעיל, ובמקרה הזה הוא שווה לחסם העליון של f בקרן.

באופן דומה, עבור f יורדת, עם חסימות מלרע וחסם תחתון.

דוגמה: הפונקציה $f(x) = \arctan x$ עולה והחסם העליון שלה בכל $\mathbb{R}$ הוא $\frac{\pi}{2}$. לכן

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

באותו אופן, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$.

“ Science, my lad, is made up of mistakes, but they are mistakes which it is useful to make, because they lead little by little to the truth.

”

Jules Verne, A Journey to the Center of the Earth