

הרצאה 5: סדרות מונוטוניות, תתי סדרות

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1 גבול אינסופי וסדרות מונוטוניות (המשך)
2	1.1 סדרות מונוטוניות
5	2 תת-סדרות ותנאי קושי
5	2.1 תת-סדרות וגבולות חלקיים



1 | גבול אינסופי וסדרות מונוטוניות (המשך)

1.1 סדרות מונוטוניות

הגדרה של סדרה מונוטונית ודוגמאות

הגדרה: תהי (a_n) סדרה.

1. נאמר שהסדרה מונוטונית עולה אם לכל n מתקיים $a_{n+1} \geq a_n$.
2. נאמר שהסדרה מונוטונית יורדת אם לכל n מתקיים $a_{n+1} \leq a_n$.
3. נאמר שהסדרה מונוטונית עולה ממש אם לכל n מתקיים $a_{n+1} > a_n$.
4. נאמר שהסדרה מונוטונית יורדת ממש אם לכל n מתקיים $a_{n+1} < a_n$.

לפעמים אומרים במקום "עולה" "לא יורדת".

דוגמאות:

1. הסדרה $1, 2, 3, \dots$ עולה.
2. הסדרה $\frac{1}{n}$ יורדת.
3. הסדרה $(-1)^n$ היא לא מונוטונית.
4. הסדרה $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. האם היא מונוטונית? יש כאן "תחרות" בין בסיס יורד למעריך עולה. לכן לא ברור אם הסדרה בכלל מונוטונית.
נחשב כמה איברים ראשונים בסדרה: $2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \dots$. מתברר שהתוצאה במקרה הזה היא ניצחון של המעריך, כלומר, הסדרה עולה. אפשר לראות את זה למשל בעזרת אי-שוויון הממוצעים:

$$\left(1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{1 + n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

נעלה את אי-השוויון בחזקת $n+1$ ונקבל $a_{n+1} \geq a_n$.

5. דוגמה כללית לסדרה עולה היא **סדרת הסכומים החלקיים** של סדרה אי-שלילית. היא מוגדרת כך: אם (a_n) סדרה אי-שלילית, אז הסכום החלקי ה- n מוגדר על ידי

$$S_n = a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

אז (S_n) סדרה עולה, כי $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$.

למשל,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

וכן

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

– ו

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$$

סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת

משפט 1. אם (a_n) סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל, אז היא מתכנסת לחסם העליון שלה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

באופן דומה, אם (a_n) סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע, אז היא מתכנסת לחסם התחתון שלה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

הערות:

- סדרה עולה היא תמיד חסומה מלרע, כי $a_n \geq a_1$ לכל n . לכן התנאי במשפט הוא בעצם שהסדרה תהיה חסומה.
- נוכיח במקרה של סדרה עולה וחסומה מלעיל. המקרה של סדרה יורדת וחסומה מלרע ניתן להוכיח באופן דומה או על ידי הפעלת המקרה הראשון על $-a_n$ (שהיא סדרה עולה).
- נעיר שהמשפט הוא מקרה ראשון של כלל שמבטיח קיום גבול אך לא מספק את ערכו של הגבול (אלא אם ידוע החסם העליון של הסדרה).

דוגמאות:

1. הסדרה $1 - \frac{1}{n}$ עולה וחסומה מלעיל על ידי 1. זה מסתדר כמובן עם העובדה שלפי אריתמטיקה של גבולות, היא מתכנסת ל-1. אנחנו למדים מהמשפט (עובדה שיכולנו להוכיח בנפרד) שהחסם העליון שלה הוא אם כך 1.
2. סדרת של סכומים חלקיים של סדרה אי-שלילית יכולים להיות חסומות וגם לא חסומות, כתלות בסדרה היסודית (a_n) . למשל, עבור $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$ נשתמש בכך ש-

$$k! = k(k-1) \dots 2 \cdot 1 \geq 2 \cdot 2 \dots 2 \cdot 1 = 2^{k-1}$$

ונקבל ש-

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leq 2$$

לכן S_n מתכנסת. כאמור זה לא נותן לנו את ערך הגבול שלה, שבעתיד עבור הדוגמה הזו בכל זאת נגלה מהו.

סדרה מונוטונית תמיד מתכנסת במובן הרחב

מסקנה: כל סדרה מונוטונית מתכנסת במובן הרחב:

- אם הסדרה חסומה, אז היא מתכנסת.
- אם הסדרה לא חסומה ועולה, אז היא שואפת ל- ∞ .
- אם הסדרה לא חסומה ויורדת, אז היא שואפת ל- $-\infty$.

מספר אוילר e

הסדרה $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ לא מתאימה לאף כלל לחישוב גבולות שפגשנו עד כה. למשל, $a_n^{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a^b$ נותן תוצאה של 1^∞ , שהוא מקרה שאין עבורו כלל (בניגוד למשל ל- $2^\infty = \infty$ ו- $0.5^\infty = 0$).

אם כך יש למצוא דרך אחרת להתמודד עם הסדרה $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

משפט 2. הסדרה $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ עולה וחסומה מלעיל. לכן היא מתכנסת.

מכיוון ש- $a_1 = 2$, נקבל מתוכן ההוכחה:

מסקנה: לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3$.

הגדרה: מספר אוילר הוא הגבול של הסדרה $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, והוא מסומן באות e : $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

מסקנה: מספר אוילר e מוגדר היטב ומקיים $2 \leq e \leq 3$.

סדרות רקורסיביות

ההתנהגות הזו של סדרות מונוטוניות מושלמת להתמודדות עם סדרות שמוגדרות באופן רקורסיבי, כי אם בניגוד להרבה דברים לגביהן שקשה להוכיח (כי אין נוסחה לאיבר הכללי), מונוטוניות היא דבר שמתבקש להוכיח מתוך הנוסחה הרקורסיבית (אם זה בכלל נכון).

דוגמה: נתונה סדרה:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

אין לנו נוסחה עבור a_n ולכן כללי האריתמטיקה ודומיהם לא יעזרו בבחינת שאלת הגבול של a_n . מנגד, זה קל להוכיח ש- a_n עולה באינדוקציה: אכן, $a_2 = \sqrt{3} \geq 1 = a_1$, ואם נניח ש- $a_{n+1} \geq a_n$ אז

$$a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1} + 2} \geq \sqrt{a_n + 2} = a_{n+1}$$

אם כך, אם a_n חסומה, אז היא מתכנסת – ואם לא, היא שואפת לאינסוף.

נראה שהיא חסומה, גם זה באינדוקציה. זה מעט יותר קשה ממונוטוניות כי צריך איכשהו "לנחש" חסם נכון מראש. מיד נראה שיטה אפשרית לנחש (ולפעמים זה אף ברור מהביטויים). בדוגמה הזו נוכיח לא הסבר של הניחוש ש- $a_n \leq 3$ לכל n . ואכן, $a_1 = 1 \leq 3$. נניח ש- $a_n \leq 3$. אז $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \leq \sqrt{3 + 2} = \sqrt{5} \leq 3$.

לסיכום, הסדרה a_n עולה וחסומה ולכן מתכנסת. כמו שראינו קודם, המשפט לא נותן מידע על הגבול. אבל, במקרה של סדרות רקורסיביות, אפשר למצוא את הגבול באופן הבא: ידוע ש- $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$. נשאיף $n \rightarrow \infty$ בנוסחת הרקורסיה (גם $a_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, זו אותה סדרה פרט לאיבר הראשון) ונקבל לפי אריתמטיקה של גבולות והתכונה לגבול של שורש:

$$L = \sqrt{L + 2} \Rightarrow L^2 - L - 2 = 0 \Rightarrow L = -1, 2$$

מכיוון ש- $a_n \geq 0$ לכל n , גם $L \geq 0$ ולכן $L = 2$.

שיטה לניחוש חסם בדוגמאות קשות: לחשב את L מראש לפי השיטה הנ"ל (לפני שידוע שהוא בכלל קיים) ולהשתמש במספר שמתקבל בתור חסם בהוכחה באינדוקציה. חשוב לשים לב: כל עוד לא הוכח שהסדרה מונוטונית וחסומה, הפתרון L שנקבל הוא מספר חסר משמעות ולכן אין לכנות אותו בשם "הגבול"!

2 | תת-סדרות ותנאי קושי

2.1 תת-סדרות וגבולות חלקיים

הגדרה של תת-סדרה ודוגמאות

בהנתן סדרה (a_n) , **תת-סדרה** היא סדרה שמורכבת מחלק מהאיברים בסדרה המקורית (a_n) לפי אותו סדר וללא חזרות.

דוגמאות:

1. למשל, הסדרה $1, 2, 3, \dots$, כלומר, $a_n = n$. יש לה כל מיני תתי-סדרות מעניינות: המספרים הזוגיים $2, 4, 6, \dots$ ($n = 2k$), כלומר, תת-הסדרה היא $(b_k = a_{2k} = 2k)$ והמספרים הראשוניים $2, 3, 5, 7, \dots$ הם שתי דוגמאות.

2. הסדרה $-1, 1, -1, \dots$, כלומר $a_n = (-1)^n$. יש לה שתי תתי-סדרות קבועות (יש לה עוד אבל הנה שתיים): $a_{2k} \equiv 1$ ו- $a_{2k-1} \equiv -1$.

תת-סדרה כללית ניתנת לתיאור כדלקמן: זו הסדרה $(b_k)_{k=1}^\infty$ (השימוש באינדקס k במקום n הוא מכוון, על מנת למנוע בלבול כי יש כבר n) שהאיבר ה- k שלה b_k הוא איזשהו איבר מהסדרה המקורית: האיבר במקום ה- n_k . כלומר, a_{n_1} הוא האיבר הראשון בתת-הסדרה. a_{n_2} הוא השני וכן הלאה.

הגדרה: תהי (a_n) סדרה. תת-סדרה שלה היא סדרה שצורתה $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$, כאשר $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots$.

המושג של תת-סדרה קשור לקיום של תכונות של מספרים מהסדרה אינסוף פעמים. למשל, בסדרה $1, 2, 3, \dots$ יש אינסוף זוגיים, ולכן יש תת-סדרה שמורכבת ממספרים זוגיים בלבד. או, בסדרה $-1, 1, -1, \dots$ מופיע המספר 1 אינסוף פעמים, כלומר, יש תת-סדרה שקבועה 1.

כל תת-סדרה של סדרה מתכנסת בהכרח מתכנסת לאותו הגבול

נשים לב שכל תתי-הסדרות של $\frac{1}{n}$ שראינו מתכנסות גם הן לאפס. זהו מקרה פרטי של המשפט הבא:

משפט 3: תהי (a_n) סדרה שמתכנסת במובן הרחב. אז כל תת-סדרה שלה מתכנסת במובן הרחב ולאותו גבול.

דוגמה: ראינו בעבר שהסדרה $-1, 1, -1, \dots$ לא מתכנסת מתוך הגדרת הגבול. הנה הוכחה קצרה יותר:

$$\begin{cases} a_{2k} \equiv 1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1, \\ a_{2k-1} \equiv -1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -1 \end{cases}$$

מכיוון ש- $1 \neq -1$, הסדרה לא מתכנסת במובן הרחב (כי אם כן אז לפי המשפט, לכל תת-סדרה יש אותו גבול).

“ Nothing takes place in the world whose meaning is not that of some maximum or minimum. ”

Leonhard Euler